RADIACIÓN CELESTE

La radiación electromagnética

- **Ecuaciones de Maxwell**

$$(I):\begin{cases}\mathrm{rot}\,\vec{E}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\\[2ex] \mathrm{div}\,\vec{B}=0\end{cases}\qquad (II):\begin{cases}\mathrm{rot}\,\vec{B}-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\dfrac{4\pi}{c}\,\vec{J}\\[2ex] \mathrm{div}\,\vec{E}=4\pi\rho\end{cases}$$

$$(I)\ \Rightarrow\ \begin{cases}\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\Phi-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\\[2ex] \vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}\end{cases}\qquad\Rightarrow\ \begin{cases}\Phi\longrightarrow\Phi-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\Gamma}{\partial t}\\[2ex] \vec{A}\longrightarrow\vec{A}+\mathrm{grad}\,\Gamma\end{cases}\qquad !!\,\mathrm{gauge}\,!!$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \triangle \vec{E} = 4\pi \,\mathrm{grad}\, \rho + \dfrac{4\pi}{c^2}\dfrac{\partial \vec{J}}{\partial t} \\ -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \triangle \vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mathrm{rot}\, \vec{J} \end{cases}$$

- **Campo electromagnético de Liénard–Wiechert**

$$\vec{E} = q\left(1 - \frac{\hat{v}^2}{c^2}\right) \frac{\hat{\vec{R}} - \dfrac{1}{c}\hat{R}\,\hat{\vec{v}}}{\left(\hat{R} - \dfrac{1}{c}\,\hat{\vec{v}}\,\hat{\vec{R}}\right)^3} + \frac{1}{c^2}\frac{q}{\left(\hat{R} - \dfrac{1}{c}\,\hat{\vec{v}}\,\hat{\vec{R}}\right)^3}\,\hat{\vec{R}} \wedge \left[\left(\hat{\vec{R}} - \frac{1}{c}\hat{R}\,\hat{\vec{v}}\right) \wedge \hat{\dot{\vec{v}}}\right]$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\hat{R}}\,\hat{\vec{R}} \wedge \vec{E}$$

donde el acento circunflejo indica que la cantidad correspondiente está evaluada en el instante retrasado.

• Pérdida de energía por radiación dipolar

Cuando un sistema de cargas emite radiación electromagnética pierde energía, que es la que después transportan las ondas emitidas. Esta energía se puede obtener a partir del campo radiante calculando el flujo energético a través de una superficie cualquiera que envuelva a la fuente. El cálculo conduce (para la aproximación más baja: *aproximación dipolar*) a la siguiente pérdida de energía por unidad de tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3c^3}\ddot{\vec{d}}^{\,2} \quad ,$$

$$\begin{cases} \vec{d} \ : \text{momento dipolar eléctrico del sistema de cargas} \\ \ddot{} \ : \text{doble derivación con respecto al tiempo} \end{cases}$$

- **Formalismo covariante**

$$\begin{cases} \lambda\,,\mu\,,\cdots = 0\,,1\,,2\,,3 \\ x^0 = ct\ ,\ x^1 = x\ ,\ x^2 = y\ ,\ x^3 = z \end{cases}$$

$$(\eta_{\lambda\mu}) \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

→ **Cuadripotencial**

$$(A^\mu):\ A^0 = \Phi\ ,\ A^1 = A_x\ ,\ A^2 = A_y\ ,\ A^3 = A_z$$

- $A_\lambda = \eta_{\lambda\mu}A^\mu$

$$\Rightarrow\ (A_\lambda):\ A_0 = -\Phi\ ,\ A_1 = A_x\ ,\ A_2 = A_y\ ,\ A_3 = A_z$$

$$\Rightarrow \quad A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Gamma \quad (!!\,gauge\,!!)$$

$\rightarrow$ Tensor campo electromagnético

$$\bullet\ F_{\lambda\mu} \equiv \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda \ \Rightarrow\ (F_{\lambda\mu} \longrightarrow F_{\lambda\mu})$$

$$(F_{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Ecuaciones de Maxwell

$$\Rightarrow \quad \left\{\ (I)\ \Leftrightarrow\ \partial_\rho F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\rho} + \partial_\mu F_{\rho\lambda} = 0\ \right\}$$

$$\bullet\ (J^\mu):\ \ J^0 = \rho\, c\ ,\ J^1 = J_x\ ,\ J^2 = J_y\ ,\ J^3 = J_z$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\ (II)\ \Leftrightarrow\ \partial_\lambda F^{\lambda\mu} = -\frac{4\pi}{c} J^\mu\ \right\}$$

• Tensor de energía–momento

$$\bullet\ \frac{4\pi}{c}\,\tau^{\lambda\mu} \equiv F^{\lambda}{}_{\sigma}\,F^{\mu\sigma} - \frac{1}{4}\eta^{\lambda\mu}\,F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

$$\begin{cases} \tau^{00} = \dfrac{c}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) \equiv w\,c \\ \tau^{0i} = \dfrac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\wedge\vec{B}\,\right)^i \equiv S^i \\ \tau^{ij} = w\,c\,\delta_{ij} - \dfrac{c}{4\pi}(E^iE^j + B^iB^j) \equiv \text{tensiones de Maxwell (signo?)} \end{cases}$$

→ Caso radiativo

$$\begin{cases} F_{\lambda\mu}\,F^{\lambda\mu} = 2(B^2 - E^2) = 0 \\ F_{\lambda\mu}\,\overset{*}{F}{}^{\lambda\mu} = 4\,\vec{E}\,\vec{B} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bullet\ \tau^{00} = \dfrac{c}{4\pi}\,E^2 \equiv w\,c \\ \bullet\ \tau^{0i} = \dfrac{c}{4\pi}\,E^2\,n^i = w\,c\,n^i \quad , \quad \vec{S} = w\,c\,\vec{n} \\ \bullet\ \tau^{ij} = w\,c\,n^i\,n^j \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \tau^{\lambda\mu} = w\,l^{\lambda}\,l^{\mu} \quad , \quad (l_{\sigma}\,l^{\sigma} = 0\ ,\ l^0 = 1)$$

• Mecanismos de producción de ondas electromagnéticas

• Mecanismos clásicos y cuánticos

• Materia y radiación (la agitación térmica produce átomos excitados en las colisiones)

• El teorema de Fourier y el espectro electromagnético

La radiación de cuerpo negro

- **Distribución espectral de Planck (1900)**

Describe la densidad de energía por unidad de longitud de onda de una radiación electromagnética en equilibrio térmico con la materia circundante, o también de una radiación que se encuentra en el interior de una caja de paredes opacas.

$$w_\lambda = \frac{dw}{d\lambda}(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \quad \clubsuit \qquad \left\{ \begin{array}{r} h = 6,62618 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \\ k_B = 1,38066 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}} \end{array} \right.$$

Equivalentemente, representa (salvo un factor $c/4$) la energía emitida por unidad de superficie, por unidad de tiempo y por unidad de longitud de onda por parte de un cuerpo totalmente absorbente (cuerpo negro), es decir, el *flujo específico* emitido:

$$F_\lambda = \frac{dF}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \quad \clubsuit$$

Notemos que **en términos de frecuencias** este flujo se escribe

$$F_\omega = \frac{dF}{d\omega} = \frac{\hbar}{2\pi c^2}\frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T}-1} \qquad \clubsuit$$

Los **cuerpos reales** no se comportan como un cuerpo negro, pues la distribución depende también de la composición. No obstante el cuerpo negro es con frecuencia una buena aproximación a la realidad.

• **Propiedades fundamentales:**

A) Flujo total emitido por el cuerpo (asociado a *todas* las frecuencias)

$$F(T) = \int_0^\infty F_\omega\, d\omega = \frac{k_B^4}{2\pi c^2 \hbar^3} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx = \frac{\pi^3 k_B^4}{30\hbar^3 c^2} T^4 \equiv \sigma T^4$$

que es la ley de Stefan–Boltzmann (1884).

$$\sigma = 5,6693 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4} \quad , \quad \text{si } T \text{ en Kelvin}$$

$$\Rightarrow \; E = aT^4 \quad , \quad a = \frac{4}{c}\sigma = 7,5643 \times 10^{-16}\,\mathrm{J/m^3K^4}$$

B) Se verifica la ley del desplazamiento de **Wien** (1892):

$$\lambda_{\mathrm{max}} T = \mathrm{Cte}$$

siendo λ_{max} la longitud de onda para la que la densidad de energía es máxima a cada temperatura T. Se tiene, por ejemplo, que para $T = 1\,\mathrm{K}$ resulta $\lambda = 0,29\,\mathrm{cm}$, lo que fija la constante. Como consecuencia, un cuerpo opaco a temperatura ambiente (300 K) emite fundamentalmente a una $\lambda \sim 0,001\,\mathrm{cm}$.

Notemos que esta ley fija el color fundamental del "cuerpo negro" a una cierta temperatura.

C) Para longitudes de onda altas se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dw}{d\lambda}(\lambda, T) = 8\pi \frac{k_B T}{\lambda^4}$$

que es la ley de **Rayleigh–Jeans**, obtenida el mismo año que la ley de Planck (1900) mediante razonamientos puramente clásicos, lo que pone de manifiesto el “carácter cuántico” de la parte situada a la izquierda del máximo en la distribución de Planck.

Luminosidades y magnitudes

- **Luminosidad (absoluta) de un objeto celeste**

$$L = \frac{dE}{dt} = \text{potencia EM } \textit{emitida} \text{ por el objeto}$$

Para el caso de una estrella con simetría esférica de radio R

$$L = 4\pi R^2 F \qquad (F: \text{ flujo emitido})$$

y si emitiera como un cuerpo negro

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

- **Luminosidad aparente (o brillo) de un objeto celeste**

$$f = \frac{dE_T}{dt_T\, d\sigma_T} = \text{flujo EM } \textit{recibido} \text{ en Tierra}$$

Si no hay pérdidas de energía, a una distancia d del objeto se tiene:

$$L = 4\pi d^2 f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{R^2}{d^2} F \quad \clubsuit$$

- **Magnitud aparente y magnitud absoluta**

Hiparco clasificó el brillo de las estrellas en seis categorías: de la *primera* a la *sexta* magnitud. En el siglo XIX se verficó que una estrella de primera magnitud es aproximadamente 100 veces más brillante que otra de sexta magnitud.

• Para adaptarse a esta situación se definió la magnitud aparente de una estrella como sigue:

$$m \equiv -2,5 \log_{10} \frac{f}{f_0}$$

donde f_0 es el brillo correspondiente a la magnitud de valor cero.

$$f_0 \text{ tal que: } \begin{cases} m \sim 1 \longrightarrow \text{estrellas más brillantes} \\ m \sim 6 \longrightarrow \text{límite de visión} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; m \equiv -2,5 \log_{10} f - 11,5 \qquad (f \; : \; \text{erg/s} \times \text{cm}^2) \quad \clubsuit$$

$$\Rightarrow \; f_0 = 10^{-4,6} \, \text{erg/s} \times \text{cm}^2 = 2,52 \times 10^{-5} \, \text{erg/s} \times \text{cm}^2$$

$$\Rightarrow \; f = 10^{-2m/5} \times 2,52 \times 10^{-5} \, \text{erg/s} \times \text{cm}^2$$

(Si m es alta, la estrella o bien está lejos o bien es débil)

• Por otro lado se define la magnitud absoluta de una estrella (propiedad intrínseca) como sigue

$$M \equiv m \;\; \text{cuando se desplaza la estrella a } 10\,\text{pc} \quad \clubsuit$$

$$\Rightarrow \;\; M = -2,5\;\log_{10}\frac{f[10\,\text{pc}]}{f_0} \qquad (1\,\text{pc} = 3,26\,\text{años luz})$$

Teniendo en cuenta:

$$\frac{L}{4\pi} = f[10\text{pc}]\dot{(}10\text{pc}) = f\,d^2$$

$$\Rightarrow \;\; M = -2,5\;\log_{10}\frac{f d^2}{f_0\cdot(10\,\text{pc})^2} = m - 5\big[\log_{10} d(\text{pc}) - 1\big] \quad \clubsuit$$

fórmula que determina el **módulo de distancia**: $M - m$

$$\Rightarrow \; M = -2,5 \, \log_{10} \frac{L}{L_0} \quad , \quad L_0 \equiv 4\pi(10\,\mathrm{pc})^2 f_0$$

$$L = 10^{-2M/5} \times 3,02 \times 10^{35}\,\mathrm{erg/s}$$

Una fórmula útil es la siguiente:

$$M = M_\odot - 2,5 \, \log_{10} \frac{L}{L_\odot} \qquad \begin{cases} M_\odot = 4,72 \\ m_\odot = -26,78 \end{cases}$$

- **Filtros y Sistemas Fotométricos (Johnson: UBV)**

magnitud aparente y nombre	**ancho de banda (nm)**	**λ central**	**f_0 (erg s^{-1} cm^{-2} Hz^{-1})**
U	68	365	$1,9 \times 10^{-20}$
B	98	444	$4,3 \times 10^{-20}$
V	89	548	$3,7 \times 10^{-20}$
R	$530 - 950$	700	
I	$700 - 1200$	880	

$$m_U - M_U = m_B - M_B = \cdots = m - M$$

$$\textbf{índices de color} = U - B = M_U - M_B \quad ; \quad B - V = M_B - M_V$$

$\Rightarrow$ índice $U - B$ alto: estrella roja; bajo: estrella azul.

Índice versus temperatura o distancia (caso de un cuerpo negro).

→ **Magnitudes específicas** vs. **bolométricas (ultravioleta, azul, fotográfica, visual, infrarroja)**

• Caso del Sol

$$\begin{cases} M(\text{bol}) = +4,72\,;\;\; M_U = 5,51\,;\;\; M_B = 5,41\,;\;\; M_V = 4,79 \\ m(\text{bol}) = -26,85\,;\; m_U = -26,06\,;\;\; m_B = -26,16\,;\;\; m_V = -26,78 \end{cases}$$

• **Extinción (absorción) atmosférica**

Se produce una disminución del flujo y por tanto un aumento de la magnitud

$$df = -\alpha\, f\, \rho\, dr \qquad \begin{cases} \alpha \equiv \text{opacidad} \\ \rho \equiv \text{densidad de moléculas absorbentes} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\;\; df = -\alpha\, f\, \rho\, dz\, \sec\chi \qquad \Rightarrow \qquad f = f_\infty e^{-\alpha A \sec\chi}$$

f : en la superficie. f_∞ : fuera de la atmósfera. χ : "distancia" cenital.

Suponiendo

$$\begin{cases} \chi = \mathrm{Cte} \quad , \quad \alpha = \mathrm{Cte} \\ A \equiv \displaystyle\int_0^\infty \rho\, dz \end{cases}$$

(A: masa de aire contenida en una columna vertical de sección unidad)

$$\Rightarrow \; m_T = m + 1,086\, \alpha A \sec \chi$$

La atmósfera también modifica el color. Por ejemplo:

$$(B - V)_T = B - V + 1,086(\alpha_B - \alpha_V) A \sec \chi$$

$\alpha_B - \alpha_V \rightarrow$ la atmósfera enrojece los astros (más en el horizonte. Scattering Rayleigh: por partículas mucho más pequeñas que la longitud de onda)

• Espectros estelares

Información procedente de los objetos estelares: $f_\omega(\alpha, \delta, t)$. En el caso particular de un cuerpo negro:

$$f_\omega = \frac{R^2}{d^2} \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad \clubsuit$$

→ Espectros contínuos

• Contínuo térmico: Consecuencia de la temperatura (la agitación térmica excita los átomos, que después emiten fotones cuando se desexcitan)

⋆ Contínuo estelar

⋆ Emisión del polvo interestelar

⋆ Fondo de microondas

• Contínuo sincrotrón (dominan las ondas de radio del gas interestelar)

• Contínuo Compton inverso: Las partículas comunican energía a los fotones aumentando su frecuencia (casi nunca es dominante)

→ Líneas de emisión y líneas de absorción (picos en el contínuo)

Transiciones energéticas discretas: Saltos de los electrones externos en átomos o bien transiciones entre estados de vibración y rotación de moléculas (en este caso forman bandas, pues son muchas y poco espaciadas)

Elemento más abundante: átomo de hidrógeno

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} \quad , \quad \Delta E = 13,6\,\mathrm{eV}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

$$n_1 \longrightarrow n_2 : \begin{cases} n_2 > n_1 : \text{emisión (el átomo cede un fotón a un contínuo)} \\ n_2 < n_1 : \text{absorción (un contínuo intenso cede un fotón al átomo)} \end{cases}$$

Rayas habituales:

⋆ Lyman–α: 121,6 nm

⋆ Balmer–α. 656,3 nm (H_α)

⋆ Raya de 21 cm (transición del espín del electrón: up–down)

⋆ Raya de 2,7 mm (emitida por el CO, molécula correlacionada con H_2)

→ **Información a partir de las rayas espectrales**

• Composición química del emisor

• Velocidad de alejamiento (radial) por efecto Doppler:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

• Ensanchamiento Doppler: redshift de unos átomos y blueshift de otros, sin redshift neto (agitación térmica, turbulencia, dispersión de velocidades en galaxias y rotación):

$$\triangle\lambda = \frac{\lambda_0}{c}\triangle v$$

Observación terrestre de una estrella. Efecto Doppler

- **Aberración estelar**

$$\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{V}_{\parallel} \quad , \quad \vec{V} = \vec{V}_{\parallel} + \vec{V}_{\perp}$$

$$\Rightarrow \ \tan A = \frac{c \, \sin \theta_e}{V + c \, \cos \theta_e} = \sin \theta_e \left(\frac{V}{c} + \cos \theta_e \right)^{-1}$$

- **Efecto Doppler (objeto celeste en el sistema “móvil”)**

$$\omega_0 = \omega_e \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta_e \right)$$

$\rightarrow$ Doppler longitudinal ($\theta_e = 0, \pi$)

- La fuente se aleja: ($\theta_e = 0$)

$$\omega_0 = \omega_e \, (1 - V/c) < \omega_e \text{ (redshift)} \quad \Rightarrow \frac{\omega_e}{\omega_0} = \left(1 - \frac{V}{c}\right)^{-1} \simeq 1 + \frac{V}{c}$$

- La fuente se acerca: ($\theta_e = \pi$)

$$\omega_0 = \omega_e \, (1 + V/c) > \omega_e \text{ (blueshift)} \quad \Rightarrow \frac{\omega_e}{\omega_0} = \left(1 + \frac{V}{c}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{V}{c}$$

$\rightarrow$ Doppler transversal? ($\theta_e = \pi/2$)

$$\omega_0 = \omega_e \qquad \text{(no existe clásicamente)}$$

- **Doppler relativista**

$$\begin{cases} \tan\theta_R = \dfrac{\sin\theta_E}{\gamma(-V/c + \cos\theta_E)} \\ \omega_R = \gamma\omega_E(1 - V/c\,\cos\theta_E) \end{cases}$$