FÓRMULAS DE GEOFÍSICA
4º Curso de Licenciado en Geología, Universidad de Salamanca

Las siguientes fórmulas y ecuaciones sirven para resolver los problemas de la asignatura **Geofísica**. El significado y valor de las diferentes constantes y parámetros no se da para todas las fórmulas, sino sólo la primera vez que aparecen.

GRAVEDAD Y GRAVIMETRÍA

2ª ley de Newton y ley de la gravitación universal

2ª ley de Newton: $F = m \cdot a$, donde *F* es la fuerza, *m* la masa y *a* la aceleración.

Ley de la gravitación universal: $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$, donde *G* es la constante de la gravitación universal: $G = 6{,}6725985 \cdot 10^{-11}$ Kg^{-1} m^3 s^{-2}, m_1 y m_2 son las masas de los objetos que se atraen, y *d* es la distancia que los separa.

Aceleración gravitacional: $a_G = G \cdot E / r^2$, donde *E* es la masa de la Tierra y *r* el radio local. Es el parámetro que expresa el campo gravitacional y es una magnitud vectorial.

Aceleración centrífuga: $a_C = -\varpi^2 \cdot r \cdot \operatorname{sen} \theta$, donde θ es la colatitud y ω la velocidad angular de rotación de la Tierra: $\omega = 7{,}2921 \cdot 10^{-5}$ rad s^{-1} (el día sideral tiene 23 h, 56' 4", 86164").

Potencial gravitacional: $U_G = -G \cdot E / r$

Potencial centrífugo: $U_C = -(\varpi^2 \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \theta)/2$

Equivalencias: $a_G = dU_G / dr$

$a_C = dU_C / dx$, donde *x* es la distancia al eje de rotación terrestre.

Valores de las masas, radios y periodos orbitales más empleados

Masa de la Tierra:	$E = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ kg
Masa de la Luna:	$M = 7{,}350 \cdot 10^{22}$ kg
Masa del Sol:	$S = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg
Radio equivalente de la Tierra:	$R = 6.371.000$ m
Radio medio de la órbita lunar:	$r_L = 382.000.000$ m
Radio medio de la órbita terrestre:	$r_T = 149.597.890.000$ m
Periodo sideral de rotación de la Tierra:	86.164 s (23 h 56 m 4 s, casi 1 día)
Periodo sideral de revolución de la Tierra:	31.558.118,4 s (365,256 días)
Periodo sideral de revolución de la Luna:	2.358.720 s (27,3 días)

Elipticidad de una órbita o de un planeta

$e = (a - b)/a$, donde *a* es el semieje mayor y *b* el menor.

Elipsoide Internacional de Referencia (E.I.R.)

Radio equivalente: $R = 6.371.000$ m

Radio ecuatorial: $a = 6.378.136$ m *Radio polar*: $c = 6.356.751$ m

Aplastamiento: $f = (a - c)/a = 1/298{,}257 = 3{,}35281 \cdot 10^{-3}$

Latitud geográfica o geodésica (λ) y latitud geocéntrica (λ') $\operatorname{tg}\lambda = (a^2/c^2)\cdot\operatorname{tg}\lambda'$

Radio del E.I.R. para cualquier latitud $r = a\cdot(1 - f\cdot\operatorname{sen}^2\lambda)$

Mecánica del movimiento circular

Velocidad angular: $\varpi = \theta/t$, donde θ es el ángulo girado y t es el tiempo,

y también: $\varpi = 2\cdot\pi/T$, donde T es el periodo.

Aceleración angular: $\alpha = d\varpi/dt$

Aceleración tangencial: $a = dv/dt$, donde v es la velocidad linear.

Aceleración radial centrípeta: $a = \varpi^2\cdot r$

Aceleración centrífuga: $a = -\varpi^2\cdot r$

<u>Equivalencias</u>: $v = \varpi\cdot r$, donde v es la velocidad linear y r el radio de giro.

$a = \alpha\cdot r$, donde a es la aceleración linear tangencial.

Momento resultante: $M = \sum r\cdot F$, donde r es el radio de giro de cada punto y F la fuerza aplicada.

El módulo del vector M es: $M = \alpha\cdot\sum m\cdot r^2$

Momento de inercia: $I = \sum m\cdot r^2$

Momento angular o cinético: $h = I\cdot\varpi$, y también $h = \varpi\cdot\sum m\cdot r^2$

2ª ley aplicada a la rotación: $M = I\cdot\alpha$

Fórmula de MacCullagh del potencial gravitacional

$$U_G = -G\cdot(E/R)\cdot\left[1 - \sum_{n=2}^{n=\infty}(R/r)^n\cdot J_n\cdot P_n(\cos\theta)\right]$$

, donde R es el radio equivalente, r el radio local, θ la colatitud, J_n los coeficientes y P_n los polinomios de Legendre:

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$J_2 = 1.082{,}6\cdot 10^{-6}$ $\quad P_2(\cos\theta) = (3\cdot\cos^2\theta - 1)/2$

$J_3 = -2{,}54\cdot 10^{-6}$ $\quad P_3(\cos\theta) = (5\cdot\cos^3\theta - 3\cdot\cos\theta)/2$

$J_4 = -1{,}59\cdot 10^{-6}$ $\quad P_4(\cos\theta) = (35\cdot\cos^4\theta - 30\cdot\cos^2\theta + 3)/8$

Potencial gravitatorio o geopotencial aproximado, sólo para el término en J_2 y $P_2(\cos\,\theta)$

$$U_g = -G\cdot\left(\frac{E}{r}\right) + 1.082{,}6\cdot 10^{-6}\cdot G\cdot\left(\frac{E}{r}\right)\cdot\left(\frac{R}{r}\right)^2\cdot\left(\frac{3\cdot\cos^2\theta - 1}{2}\right) - \left(\frac{\varpi^2\cdot r^2\cdot\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right)$$

Fórmula de la gravedad normal $g_n = g_e(1 + \beta_1\cdot\operatorname{sen}^2\lambda + \beta_2\cdot\operatorname{sen}^2 2\lambda)$, donde

$g_e = 9{,}780327$ m s^{-2}, es la gravedad en el ecuador, y

$\beta_1 = 5{,}3024\cdot 10^{-3}$ $\quad \beta_2 = -5{,}87\cdot 10^{-6}$

Fórmula del péndulo simple $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{(l/g)}$, donde l es la longitud del péndulo y T su periodo de oscilación.

Fórmula del péndulo físico $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{I/(m\cdot g\cdot h)}$, donde I es el momento de inercia del péndulo, m es su masa y h la distancia del centro de gravedad al eje de giro. La longitud equivalente es $l = I/(m\cdot h)$

Correcciones o reducciones en gravimetría

Corrección de deriva: Δg_D se calcula midiendo g en la base a intervalos regulares, apuntando el tiempo, calculando la línea de deriva y sumando (con su signo) a las medidas en los demás puntos las diferencias correspondientes a cada tiempo. Puede ser positiva o negativa.

Corrección de marea: para calcular la aceleración residual a_T se usa la fórmula de Longman, que se aplica con un programa de ordenador. Puede ser positiva o negativa.

Corrección de latitud respecto a la base: $\Delta g_\lambda = 0{,}814 \cdot \operatorname{sen} 2\lambda \cdot d$ mGal, donde λ es la latitud de la base y d la distancia N-S a la base en kilómetros. Se suma cuando λ disminuye (hacia el ecuador) y se resta cuando λ aumenta (hacia el polo).

Corrección topográfica o de terreno: Para efectuarla, se emplean la plantilla y la tabla de Hammer, que constan de 13 zonas (A a M). Esta corrección se divide en próxima, media y lejana. La próxima es para las zonas A, B y C. Si se escoge la estación en una zona llana, de forma que no haya variaciones de relieve importantes en unos 50 m a la redonda, no es necesario hacerla. La media abarca las zonas D, E, F, G, H e I. Es la más importante y hay que aplicarla cuando el relieve hasta unos 4,5 km alrededor de la estación tiene pendientes superiores al 5 %. La lejana abarca las zonas J, K, L y M, hasta un radio de 22 km, y es necesaria en áreas claramente montañosas. Para cada elemento de la plantilla,

$$\Delta g_T = G \cdot \rho \cdot \Phi \cdot \left[\left(\sqrt{r_1^2 + h^2} - r_1\right) - \left(\sqrt{r_2^2 + h^2} - r_2\right)\right]$$

, donde ρ es la densidad en kg m^{-3}, Φ el ángulo central del elemento, r_1 y r_2 los radios interior y exterior del elemento, y h su altura media en metros. Siempre se suma.

Corrección de placa de Bouguer: $\Delta g_{BP} = 2 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot h = 4{,}19 \cdot 10^{-5} \cdot \rho \cdot h$ mGal, donde ρ es la densidad en kg m^{-3} y h la altura en metros. Se resta en medidas sobre el nivel del mar o sobre la base. Se suma en el mar o por debajo de la base.

Corrección de aire libre: $\Delta g_{FA} = 2 \cdot g \cdot h / r = 0{,}308 \cdot h$ mGal, donde h es la altura en metros. Se suma en medidas sobre el nivel del mar o sobre la base, y se resta por debajo.

Corrección de elevación: $\Delta g_{EL} = \Delta g_{BP} + \Delta g_{FA} \approx 0{,}2$ mGal / m (es decir, cada metro). Se suma en medidas sobre el nivel del mar o sobre la base, y se resta por debajo.

Corrección de Eötvös: $\Delta g_{Eö} = 2 \cdot 10^5 \cdot \varpi \cdot V_E \cdot \cos\lambda$ mGal, donde ω es la velocidad angular de rotación de la Tierra: $\omega = 7{,}2921 \cdot 10^{-5}$ rad s^{-1}, V_E es la componente hacia el Este de la velocidad del móvil desde el que se toman las medidas, en m s^{-1}, y λ es la latitud local. Se suma si el móvil va hacia el E y se resta si va hacia el W.

Signos: Hay que tener mucho cuidado con los signos de las correcciones en gravedad, pues según el tipo de corrección y el caso concreto, puede ser necesario sumarlas o restarlas a la gravedad medida para calcular las anomalías.

Anomalías gravimétricas

Anomalía de aire libre:

$$\Delta g_F = g_{ABS} + \left[\left(\Delta g_D + a_T + \Delta g_{Eö}\right) + \Delta g_T + \Delta g_{FA}\right] - g_n$$

Anomalía de Bouguer:

$$\Delta g_B = g_{ABS} + \left[\left(\Delta g_D + a_T + \Delta g_{Eö}\right) + \Delta g_T + \Delta g_{BP} + \Delta g_{FA}\right] - g_n$$

Anomalía relativa (con respecto a una estación base):

$$\Delta g_R = g_L + \left[\left(\Delta g_D + a_T + \Delta g_{Eö}\right) + \Delta g_\lambda + \Delta g_T + \Delta g_{BP} + \Delta g_{FA}\right] - g_{Base}$$

, donde g_{ABS} es la gravedad absoluta medida, g_n es la gravedad normal (en el E.I.R.), g_L es la lectura en un aparato que mide gravedad relativa, y g_{Base} es la lectura en la base. Las correcciones son: Δg_D deriva instrumental, a_T marea, $\Delta g_{Eö}$ de Eötvös, Δg_λ de latitud, Δg_T topográfica, Δg_{BP} de placa de Bouguer y Δg_{FA} de aire libre. Cada una de ellas se suma con su signo correspondiente.

MAGNETISMO Y GEOMAGNETISMO

Unidades

Amperio (A): corriente eléctrica que circulando en igual sentido por dos conductores paralelos, separados 1 m y en el vacío, les hace atraerse con una fuerza (por metro de longitud) $F/m = 2\cdot 10^{-7}$ N m^{-1}

Culombio (C): carga que pasa por un conductor cada segundo cuando la intensidad de la corriente es de 1 amperio: 1 A = 1 C s^{-1}. Como la carga del electrón es $e^- = 1{,}602\cdot 10^{-19}$ C, un culombio equivale a la carga de $6{,}25\cdot 10^{18}$ electrones (o protones).

Tesla (T): unidad de campo magnético en SI. 1 T = 1 N A^{-1} m^{-1} = 1 Kg s^{-1} C^{-1}. Es muy grande, por lo que se usan el militesla (1 mT = 10^{-3} T) y el nanotesla (1 nT = 10^{-9} T).

Gauss (G): unidad de campo magnético en c.g.s. 1 G = 0,1 g s^{-1} C^{-1}. Es grande, por lo que se usa la gamma: 1 γ = 10^{-5} G. Equivalencias: 1 G = 10^{-4} T; 1 γ = 1 nT.

Ley de Coulomb

Fuerza entre dos cargas eléctricas: $F = k\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}$, donde q_1 y q_2 son las cargas eléctricas y r la distancia que las separa. F es la fuerza de atracción (si las cargas son de distinto signo) o repulsión (si son de igual signo) y k es la constante de Coulomb.

Constante de Coulomb: SI $k = 8{,}987551788\cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}

Fuerza de atracción magnetostática

Es la aplicación de Gauss de la ley de Coulomb a la fuerza entre dos cargas magnéticas.

Fuerza entre dos cargas magnéticas: $F = k\cdot\frac{p_1\cdot p_2}{r^2}$, donde p_1 y p_2 son las cargas magnéticas y r la distancia que las separa. F es la fuerza de atracción (si las cargas son de distinto signo) o repulsión (si son de igual signo) y k es la constante de la fuerza magnetostática. En SI, las dimensiones de p son A m, ó C m s^{-1}.

Constante de la fuerza magnetostática: SI $k = 10^{-7}$ N A^{-2}; c.g.s. $k = 1$

Fuerza de atracción electromagnética (derivada de la ley de Ampère)

Fuerza entre dos conductores rectos y paralelos que transportan corriente:

$$F/m = \mu_0\cdot\frac{I_1\cdot I_2}{2\cdot\pi\cdot r}$$

, donde I_1 e I_2 son las intensidades de las corrientes y r la distancia que separa los dos conductores. F/m es la fuerza de atracción (si las dos corrientes circulan en el mismo sentido) o repulsión (si circulan en sentidos contrarios) entre los dos conductores por metro (unidad de distancia SI) y μ_0 es la constante de permeabilidad magnética en el vacío.

Constante de permeabilidad magnética en el vacío: SI $\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}$ N A^{-2}.

En electromagnetismo el sistema c.g.s. se divide en tres sistemas: esu (electrostático), emu (electromagnético) y gaussiano. El más usado en geomagnetismo es el emu, donde $\mu_0 = 1$.

Campo magnético

Definición magnetostática: es la fuerza ejercida por una carga magnética p por unidad de carga, es decir sobre una carga magnética unidad $B = k\cdot\frac{p}{r^2}$, separada una distancia r.

Definición electromagnética: es la fuerza ejercida por una corriente eléctrica (I) que circula por un conductor rectilíneo sobre otro paralelo por el que circula una corriente de intensidad unidad

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

El campo magnético es una magnitud vectorial y su orientación varía en el espacio.

Potencial de un polo magnético

Es el trabajo (W) a realizar contra el campo magnético creado por una carga magnética p, que se necesita para mover una carga magnética unidad desde una distancia r hasta el infinito:

$W = -\mu_0 \cdot \frac{p}{4 \cdot \pi \cdot r}$. En SI, sus dimensiones son N A^{-1}.

Potencial de un dipolo magnético

Es el trabajo (W) a realizar contra el campo magnético creado por un dipolo cuyas cargas magnéticas tienen una magnitud p cada una, necesario para mover una carga magnética unidad desde una distancia r hasta el infinito:

$W = -\mu_0 \cdot \frac{d \cdot p \cdot \cos\theta}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = -\mu_0 \cdot \frac{m \cdot \cos\theta}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$, donde d es la distancia entre las dos cargas del dipolo, θ es el ángulo que forma el segmento r con el eje del dipolo y m es el momento magnético del dipolo. En SI, sus dimensiones son N A^{-1}. El momento magnético del dipolo se define como $m = d \cdot p$ y sus dimensiones en SI son A m^2.

Campo magnético de un dipolo

Depende de la distancia y de la posición con respecto al centro del dipolo. Tiene dos componentes, una radial (B_r) y otra tangencial (B_θ). Las cuales se obtienen derivando parcialmente el potencial del dipolo con respecto a r (componente radial) y θ (componente tangencial):

$B_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \mu_0 \cdot \frac{m \cdot \cos\theta}{2 \cdot \pi \cdot r^3}$ y $B_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial W}{\partial \theta} = \mu_0 \cdot \frac{m \cdot \operatorname{sen}\theta}{4 \cdot \pi \cdot r^3}$, donde la derivada parcial se multiplica por $1/r$ para obtener la variación del potencial con respecto a la distancia, en vez de con respecto al ángulo.

En SI, sus dimensiones son N $A^{-1}m^{-1}$, y las dos componentes son dos vectores perpendiculares entre sí. El campo magnético total es la suma vectorial de B_r y B_θ.

Campo magnetizador e inducción magnética en el vacío

Campo magnetizador (H): es el creado por una corriente eléctrica de intensidad I circulando por un conductor rectilíneo, y a una distancia r vale: $H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$

Inducción magnética (B): es otro campo magnético, creado por el campo magnetizador, y que en el vacío vale: $B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$

Relación entre ambas magnitudes: $B = \mu_0 \cdot H$. Es decir, la inducción producida depende del campo inductor o magnetizador, pero también de la permeabilidad magnética. En el vacío, la relación es directamente proporcional y la constante de proporcionalidad es la permeabilidad magnética en el vacío. La relación aclara el significado de esta última: $\mu_0 = B/H$. H también se llama la intensidad del campo magnético, y B la densidad de flujo magnético.

En SI, la inducción magnética (*B*) se da en teslas: 1 T = 1 N A^{-1} m^{-1} = 1 Kg s^{-1} C^{-1}. Es una unidad muy grande, por lo que se usan el militesla (1 mT = 10^{-3} T) y el nanotesla (1 nT = 10^{-9} T). El campo magnetizador (*H*) se da en A m^{-1}.

En el sistema c.g.s., la inducción magnética (*B*) se da en gauss:1 G = 0,1 g s^{-1} C^{-1}. Es una unidad grande, por lo que se usa la gamma: 1 γ = 10^{-5} G. Equivalencias: 1 G = 10^{-4} T; 1 γ = 1 nT. El campo magnetizador (*H*) se da en oersted: 1 Oe = 0,1 g s^{-1} C^{-1}. Como se ve, 1 Oe = 1 G, lo que implica que $\mu_0 = 1$. Sin embargo, en electromagnetismo el sistema c.g.s. se divide en tres sistemas: esu (electrostático), emu (electromagnético) y gaussiano. El más usado en geomagnetismo es el emu, donde $\mu_0 = 1$. En esu, $\mu_0 = 1/c^2$, donde *c* es la velocidad de la luz en el vacío:

$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ m s^{-2}.

Magnetización y campo magnético dentro de un material

Los campos magnéticos sólo pueden ser producidos por corrientes eléctricas, por lo que las cargas magnéticas son ficticias, aunque conceptualmente útiles. En un material magnetizado, las corrientes eléctricas son producidas por los electrones en movimiento dentro de los átomos. Los electrones en movimiento tienen dos momentos magnéticos, el orbital y el del espín.

Momento magnético orbital del electrón: $m_o = \dfrac{q \cdot h}{2 \cdot m}$, donde *q* es la carga ($1{,}602177 \cdot 10^{-19}$ C) y *m* la masa ($9{,}10939 \cdot 10^{-31}$ Kg) del electrón. *h* es el momento angular ($h = m \cdot \varpi \cdot r^2$) y su valor depende de la velocidad angular (*ω*) y el radio de la órbita (*r*).

Momento magnético del espín del electrón: $m_s = \dfrac{q \cdot h}{m}$

Momento magnético total del electrón: es la suma de m_o y m_S: $m_e = m_o + m_s$

Magnetización (*M*): es la suma vectorial de los momentos magnéticos totales de todos los electrones de todos los átomos contenidos en una unidad de volumen: $M = \sum_i m_i / V$. Sus dimensiones son iguales que las del campo magnetizador. En SI se da en A m^{-1} y en c.g.s., en gauss: 1 G = 0,1 g s^{-1} C^{-1}.

Susceptibilidad magnética

La magnetización (*M*) es consecuencia de la aplicación de un campo magnetizador (*H*), y ambos se relacionan por: $M = k \cdot H$, donde *k* (kappa) es la susceptibilidad magnética del material por unidad de volumen. Por lo tanto, $k = M/H$. No tiene dimensiones pero su valor cambia según el sistema utilizado:

1 *k* (c.g.s.)$\cdot 4 \cdot \pi =$ *k* (SI). Es decir: para pasar de *k* (c.g.s.) a *k* (SI) hay que multiplicar por 4π.

El valor de *k* puede ser negativo (materiales diamagnéticos) o positivo y, en general, es muy pequeño, del orden de 10^{-4} ó 10^{-6} SI. Sólo en materiales ferromagnéticos, se acerca a 1 y puede, excepcionalmente, aproximarse a 10 SI.

Inducción magnética en un material

Un campo magnetizador (*H*) crea sólo una inducción magnética (*B*) en el vacío. Pero en presencia de un material magnetizable, crea en él una magnetización (*M*) que es a su vez un campo inductor y contribuye a la inducción. Por tanto en este caso: $B = \mu_0 \cdot H + \mu_0 \cdot M = \mu_0 \cdot (H + M)$.

Como $M = k \cdot H$, podemos escribir: $B = \mu_0 \cdot (H + k \cdot H) = \mu_0 \cdot H \cdot (1 + k) = \mu_0 \cdot \mu \cdot H$, donde μ es la permeabilidad magnética del material, o permeabilidad relativa. Su valor es aproximadamente 1 para la mayoría de los materiales, y sólo los ferromagnéticos tienen valores entre 1 y 2 y, excepcionalmente, cercanos a 10.

Fórmula de Gauss del potencial geomagnético de un campo multipolar

Es una fórmula derivada de la más general de Gauss, referida exclusivamente al campo magnético terrestre de origen interno:

$$W = R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\cdot\left(\ g_n^l\cdot\cos(l\cdot\phi)+h_n^l\cdot\operatorname{sen}(l\cdot\phi)\ \right)\cdot P_n^l(\cos\theta)$$

, donde R es el radio equivalente de la Tierra (6.371.000 m), r es el radio local, ϕ y θ son la longitud y la colatitud magnéticas y $P_n^l(\cos\theta)$ son los polinomios de Schmidt, relacionados con los de Legendre que se usan en gravedad.

Los términos g_n^l, h_n^l son los coeficientes de Gauss de grado n y orden l. Los términos con $n=1$, (g_1^0, g_1^1, h_1^1) corresponden a tres campos dipolares, uno paralelo al eje de rotación terrestre y los otros dos perpendiculares a él. Los términos con $n=2$ describen un campo más complejo, cuadrupolar, los $n=3$ describen un campo octupolar y así sucesivamente. El campo magnético de origen interno se describe muy bien con términos hasta $n=7$, y los términos superiores son muy pequeños y suelen depreciarse. No obstante, el International Geomagnetic Reference Field (I.G.R.F.) utiliza coeficientes hasta $n=10$.

El campo geomagnético dipolar

Para el dipolo terrestre, el campo depende de la distancia y de la posición con respecto al centro de la Tierra, y tiene dos componentes, una radial (B_r) y otra tangencial (B_θ). Las componentes se obtienen derivando parcialmente el potencial del dipolo (cuya ecuación se vio previamente) con respecto a r (componente radial) y θ (componente tangencial):

$$B_r = \frac{\partial W}{\partial r} = \mu_0\cdot\frac{2\cdot m\cdot\cos\theta}{4\cdot\pi\cdot r^3}$$

$$B_\theta = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial\theta} = \mu_0\cdot\frac{m\cdot\operatorname{sen}\theta}{4\cdot\pi\cdot r^3}$$

, donde la derivada parcial se multiplica por $1/r$ para obtener la variación del potencial con respecto a la distancia, en vez de con respecto al ángulo.

r es el radio local y θ la colatitud geomagnética. m es el momento magnético del dipolo terrestre, aunque se usa una fórmula que promedia los coeficientes de Gauss (g_1^0, g_1^1, h_1^1) de tres campos dipolares, uno paralelo al eje de rotación terrestre y los otros dos perpendiculares a él (ver más abajo).

En SI, las dimensiones son N A^{-1} m^{-1}, y las dos componentes son dos vectores perpendiculares entre sí: B_r actúa dirigido al centro de la Tierra, y B_θ paralelamente a la superficie.

Para obtener el campo magnético total B, hay que sumar vectorialmente B_r y B_θ. El módulo del vector B es:

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = \frac{\mu_0\cdot m}{4\cdot\pi}\cdot\frac{\sqrt{1+3\cdot\cos^2\theta}}{r^3}$$

La orientación, dentro del meridiano magnético de la localidad, viene dada por la inclinación (I), que se calcula por:

$$\operatorname{tg} I = \frac{B_r}{B_\theta} = \frac{2\cdot\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 2\cdot\cot g\theta = 2\cdot\operatorname{tg}\lambda$$

, donde λ es la latitud geomagnética.

Momento geomagnético dipolar terrestre

$$m = \frac{4\cdot\pi\cdot R^3}{\mu_0}\cdot\sqrt{(g_1^0)^2+(g_1^1)^2+(h_1^1)^2}$$

, donde R = 6.371.000 m, $\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}$ N A^{-2}, y los coeficientes de Gauss para el año 2005 valían:

$g_1^0 = -29.557$ nT $\qquad$ $g_1^1 = -1.672$ nT $\qquad$ $h_1^1 = +5.080$ nT

GEOELECTRICIDAD

Unidades

Amperio (A): corriente eléctrica que circulando en igual sentido por dos conductores paralelos, separados 1 m y en el vacío, genera unos campos magnéticos alrededor que les hace atraerse con una fuerza (por metro de longitud) $F/m = 2 \cdot 10^{-7}$ N m^{-1}

Culombio (C): carga que pasa por un conductor cada segundo cuando la intensidad de la corriente es de 1 amperio: 1 A = 1 C s^{-1}. Como la carga del electrón es $e^{-} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, un culombio equivale a la carga de $6{,}25 \cdot 10^{18}$ electrones (o protones).

Voltio (V): unidad de diferencia de potencial en SI 1 V = 1 J C^{-1}.

Ohmio (Ω): unidad de resistencia de un conductor en SI 1 Ω = 1 V / 1 A.

Watio (W): unidad de potencia en SI 1 W = 1 V A = 1 J s^{-1}.

Ley de Coulomb

Fuerza entre dos cargas eléctricas: $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, donde q_1 y q_2 son las cargas eléctricas y r la distancia que las separa. F es la fuerza de atracción (si las cargas son de distinto signo) o repulsión (si son de igual signo) y k es la constante de Coulomb.

También se expresa: $F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$, donde ε_0 es la constante de permitividad.

Constante de Coulomb: SI $k = 8{,}987551788 \cdot 10^{9}$ N m^{2} C^{-2} (No confundir con la constante de la fuerza magnetostática, también llamada k y cuyo valor SI es $k = 10^{-7}$ N A^{-2}).

Constante de permitividad: SI $\varepsilon_0 = 8{,}85419 \cdot 10^{-12}$ N^{-1} m^{-2} C^{2}. Observar que $\varepsilon_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k}$

Campo eléctrico: $E = k \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$, es la fuerza que una carga eléctrica q ejerce por unidad de carga, es decir, sobre otra carga eléctrica unidad, separada una distancia r. En SI, el campo eléctrico se mide en V m^{-1}, es decir, en voltios por metro, y también en N C^{-1}.

El campo eléctrico es vectorial, con las líneas de flujo saliendo radialmente de las cargas positivas y entrando radialmente en las negativas. Cuando hay dos cargas eléctricas próximas, las líneas de flujo se curvan fuertemente.

Potencial eléctrico: $U = -k \cdot \frac{q}{r} = -\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$, dentro de un campo eléctrico es la energía por unidad de área necesaria para llevar una carga eléctrica unidad desde una distancia r de la carga q que produce el campo, hasta el infinito. En SI, el potencial eléctrico se mide en voltios. 1 V = 1 J C^{-1}.

Como en los casos de gravedad y magnetismo, también aquí se cumple que $E = dU/dr$, es decir, la magnitud del campo eléctrico en un punto viene dada por la variación del potencial eléctrico con respecto a la distancia de la carga que lo produce. Por tanto,

$$U = \int_r^{\infty} E \cdot dr = \int_r^{\infty} \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot dr = -\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$$

Diferencia de potencial: es la energía necesaria para mover una carga eléctrica unidad de un punto a otro dentro de un campo eléctrico. Las cargas eléctricas fluyen de los puntos con mayor a los de menor potencial, de forma similar a los líquidos en una tubería. Se denota como V.

Ley de Ohm $V = I \cdot R$, donde I es la corriente eléctrica, V la diferencia de potencial y R la resistencia del conductor. Se aplica a la conducción electrónica.

Resistencia (R): es la medida de lo que un conductor se opone a la circulación de la corriente eléctrica. De la ley de Ohm se deduce que $I = V/R$, es decir, la resistencia impone la intensidad de la corriente que circula por el conductor para una diferencia de potencial dada. Se mide en ohmios (Ω).

Conductancia (1/R): es el inverso de la resistencia, y se mide en siemens (S): 1 S = 1 Ω^{-1} (también se denomina mho: 1 mho = 1 S = 1 Ω^{-1}).

Resistividad (ρ): la resistencia de un conductor es directamente proporcional a su longitud L, e inversamente proporcional al área de su sección transversal A: $R = \rho \cdot \dfrac{L}{A}$, donde ρ es la resistividad, que se mide en Ω m y es una propiedad material del conductor. Valores orientativos de la resistividad son 10^{-5} a 1 Ω m para menas metálicas, 0,3 Ω m para el agua de mar, 1 a 10^{3} Ω m para sedimentos más o menos porosos empapados en agua, y entre 10^{2} y 10^{5} Ω m para rocas ígneas y metamórficas.

Conductividad (σ): es el inverso de la resistividad, y se mide en Ω^{-1} m^{-1}. Valores orientativos de la conductividad son 10^{5} a 1 Ω^{-1} m^{-1} para menas metálicas, 3,3 Ω^{-1} m^{-1} para el agua de mar, 1 a 10^{-3} Ω^{-1} m^{-1} para sedimentos más o menos porosos, y entre 10^{-5} y 10^{-2} Ω^{-1} m^{-1} para rocas ígneas y metamórficas.

Densidad de corriente (J): introduciendo la resistividad en la ecuación que describe la ley de Ohm: $V = I \cdot \rho \cdot \dfrac{L}{A}$, y $\dfrac{V}{L} = \rho \cdot \dfrac{I}{A}$, donde V/L es el campo eléctrico E para un gradiente constante de potencial a lo largo del conductor, pues $E = -dU/dr$. Por otra parte, I/A es la corriente por unidad de sección del conductor, que se llama densidad de corriente (J) y se mide en A m^{-2}. La ley de Ohm puede escribirse también: $E = \rho \cdot J$, forma que se usa a menudo en los cálculos en prospección eléctrica.

Constante dieléctrica relaciona la permitividad de un material con la constante de permitividad, ε_0: $\varepsilon = \kappa \cdot \varepsilon_0$, donde κ es la constante dieléctrica. Cuando un campo eléctrico actúa en un medio distinto del espacio libre, hay que sustituir ε por ε_0 en las fórmulas derivadas de la ley de Coulomb. Se emplea en la conducción dieléctrica, y su valor en las rocas oscila entre 3 y 80 aproximadamente.

Ruptura dieléctrica es el fenómeno que provoca que materiales no conductores se conviertan en conductores por ionización en presencia de campos eléctricos elevados. Para el aire, ocurre cuando $E \cong 3 \cdot 10^{6}$ V m^{-1}.

SISMOLOGÍA Y SISMICIDAD

Módulos, coeficientes y constantes del comportamiento elástico

Módulo de elasticidad (o de Young, E): $\sigma = E \cdot \varepsilon$, donde σ es el esfuerzo normal aplicado en una dirección, y ε es la elongación en esa misma dirección ($\varepsilon = (l_f - l_0)/l_0$).

Módulo de rigidez (o de cizalla, μ): $\tau = \mu \cdot \gamma$, donde τ es el esfuerzo de cizalla aplicado en una dirección, y γ es el valor de la cizalla (la tangente del ángulo que se ha cizallado una perpendicular a esa dirección).

Módulo de volumen (o incompresibilidad, k): $p = -k \cdot \Delta$, donde p es la presión hidrostática, y Δ es la ditatación ($\Delta = (V_f - V_0)/V_0$, donde V_0 es el volumen inicial y V_f el final).

Coeficiente de Poisson (υ): $\upsilon = \dfrac{\varepsilon_{transversal}}{\varepsilon_{longitudinal}}$. Su valor en las rocas oscila alrededor de $\upsilon = 0{,}25$.

Constantes de Lamé (λ y μ): μ es el módulo de rigidez y

$$\lambda = \frac{E \cdot \upsilon}{(1+\upsilon)\cdot(1-2\cdot\upsilon)} = \frac{2\cdot\mu\cdot\upsilon}{(1-2\cdot\upsilon)}$$

Relaciones entre módulos, coeficientes y constantes:

$$k = \frac{E}{3\cdot(1-2\cdot\upsilon)}, \quad \mu = \frac{E}{2\cdot(1+\upsilon)}, \quad E = \frac{\mu\cdot(3\cdot\lambda+2\cdot\mu)}{(\lambda+\upsilon)}, \quad \upsilon = \frac{\lambda}{2\cdot(\lambda+\mu)}$$

Parámetros que caracterizan las ondas

Desplazamiento armónico (u): desplazamiento de una partícula en un instante dado.
Amplitud (A): desplazamiento máximo de una partícula afectada por una onda.
Frecuencia (f): número de ondas que pasa por un punto en un segundo.
Periodo (T): Tiempo que tarda una onda en pasar por un punto, en segundos: $T = 1/f$

Frecuencia angular (ω): $\varpi = 2\cdot\pi\cdot f = 2\cdot\dfrac{\pi}{T}$

Longitud de onda (λ): distancia entre los dos puntos equivalentes más próximos.
Número de onda (k): número de ondas que están atravesando una unidad de longitud en un instante dado: $k = 1/\lambda$
Velocidad de propagación (V): $V = \lambda\cdot f = \lambda/T$
Fase (ϕ): tiempo que debe retrasarse una onda sinusoidal para que $u = 0$ cuando $t = 0$.

Velocidad de las ondas sísmicas

Ondas P: $\alpha = V_P = \sqrt{\dfrac{(\lambda+2\cdot\mu)}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{k+(4/3)\cdot\mu}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}\cdot\dfrac{(1-\upsilon)}{(1-2\cdot\upsilon)\cdot(1+\upsilon)}}$, donde ρ es la densidad.

Relación empírica entre V_p y ρ: $\rho = 309{,}54\cdot V_P^{\,0{,}25}$, donde V_P está en m s^{-1} y ρ en Kg m^{-3}.

Ondas S: $\beta = V_S = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}\cdot\dfrac{1}{2\cdot(1+\upsilon)}}$

Relación entre α y β: $\dfrac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\dfrac{(1-\upsilon)}{(1/2-\upsilon)}}$, que vale entre 1,5 y 2. Para $\upsilon = 0{,}25$, $\dfrac{\alpha}{\beta} = \sqrt{3} = 1{,}732$.

En términos de k y ρ: $\alpha^2 - \dfrac{4}{3}\cdot\beta^2 = \dfrac{k}{\rho}$

Ondas de Rayleigh (L_R): $V_{L_R} = \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{3}}} \cdot \beta = 0{,}9194 \cdot \beta$, para $\upsilon = 0{,}25$.

Ondas de Love (L_Q): $\beta_1 < V_{L_Q} < \beta_2$, donde β_1 y β_2 son las velocidades V_s de los lechos superficial e inferior, respectivamente.

Ecuación de una onda sinusoidal

Onda en fase: $u = A \cdot \mathrm{sen}\, 2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} = A \cdot \mathrm{sen} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t$

Onda desfasada: $u = A \cdot \mathrm{sen} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot (t - \phi)$

Energía, atenuación y absorción de las ondas

Energía que transporta una onda sísmica en un ciclo: $E = 1/2 \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot A^2 = 2 \cdot \pi^2 \cdot \rho \cdot f^2 \cdot A^2$

Atenuación geométrica: se debe a la expansión del frente de onda, pues la energía se reparte a lo largo de él:

Para ondas P y S, el frente es aproximadamente esférico: A es proporcional a $1/r$.

Para ondas de superficie, el frente es una circunferencia: A es proporcional a $1/\sqrt{r}$

Absorción: se debe a las propiedades anelásticas de las rocas y se llama también frenado anelástico.

$\delta = \log \frac{A_n}{A_{n+1}}$, donde A_n es la amplitud de un ciclo cualquiera y A_{n+1} la del siguiente.

Factor de calidad (Q): $Q = \pi / \delta$

Anelasticidad (α): $\alpha = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta \cdot f}{V} = \frac{\pi \cdot f}{Q \cdot V}$

Efecto combinado de la atenuación geométrica y la absorción: La amplitud (A) de una onda a una distancia r de la fuente puede calcularse a partir de la amplitud (A_0) conocida para una distancia r_0.

<u>Para ondas P y S</u>: $A = A_0 \cdot \frac{r_0}{r} \cdot e^{-\alpha \cdot (r - r_0)} = A_0 \cdot \frac{r_0}{r} \cdot e^{-\left(\frac{\pi \cdot f}{Q \cdot V}\right) \cdot (r - r_0)}$

<u>Para ondas de superficie</u>: $A = A_0 \cdot \sqrt{\frac{r_0}{r}} \cdot e^{-\alpha \cdot (r - r_0)} = A_0 \cdot \sqrt{\frac{r_0}{r}} \cdot e^{-\left(\frac{\pi \cdot f}{Q \cdot V}\right) \cdot (r - r_0)}$

Medida de los terremotos

Intensidad (I): medida subjetiva, basada en los efectos con que el terremoto se deja sentir en una región. Se emplean las escalas de Mercalli, MM (Modified Mercalli), MSK (Medvedev-Sponheuer-Karnik) y EMS (European Macroseismic Scale). Tienen 12 estadios y se numeran con números romanos, del I al XII.

Magnitud: medida objetiva del tamaño real de un terremoto en su foco. Se basa en la amplitud registrada de las ondas, pero que tiene en cuenta también la distancia al foco. Se definen varias magnitudes:

Magnitud local (M_L): $M_L = \log_{10}(A_{máx}) - \log_{10}(A_0)$, donde $A_{máx}$ es la máxima amplitud de las ondas sísmicas registradas (sean P, S o L), medida en micras (μm) a 100 km del epicentro, y A_0 = 1 μm =10^{-3} mm, es una amplitud de referencia. La amplitud a 100 km del epicentro se calcula por la fórmula de la atenuación y absorción. Los sismómetros modernos miden desde $M_L = -2$, aunque la escala original de Richter empezaba en cero. No hay límite superior, aunque para los mayores terremotos registrados, $M_L < 9$. Una versión empírica de M_L es: $M_L = \log_{10}(A_{\text{máx}}) - 2{,}48 + 2{,}76 \cdot \log_{10}(\Delta)$, donde $A_{máx}$ va en milímetros y Δ en km.

Magnitud de las ondas de superficie (M_S): $M_S = \log_{10}(\frac{A_S}{T}) + 1{,}66 \cdot \log_{10}(\Delta^0) + 3{,}3$, donde A_S es la amplitud máxima de las ondas de superficie con un periodo de 20 ± 2 s, medida en micras, T es el periodo y Δ^o es la distancia epicentral en grados. La fórmula es válida para sismos superficiales (menos de 50 km de profundidad) y para distancias epicentrales superiores a 20º. La máxima M_S registrada, es la del terremoto de Alaska de 1964, con un valor de 8,6.

<u>Relación empírica entre la magnitud M_S y la longitud (L) de la falla</u> que produjo el terremoto, cuando aflora y se puede medir: $M_S = 6{,}1 + 0{,}7 \cdot \log_{10}(L)$

Magnitud de las ondas del cuerpo (m_B y m_b): $m_B = \log_{10}(\frac{A_{P,S}}{T}) + 0{,}01 \cdot \Delta^0 + 5{,}9$, donde $A_{P,S}$ es la amplitud máxima de las ondas P ó S con un periodo de 4 a 20 s, medida en micras, T es el periodo y Δ^o es la distancia epicentral en grados. La fórmula es válida para telesismos, es decir, para distancias epicentrales superiores a 10º, y se emplea en sismogramas de instrumentos de banda ancha. De hecho, se usa más m_b, medida en sismogramas de banda estrecha y periodo corto: $m_b = \log_{10}(\frac{A_P}{T}) + 0{,}01 \cdot \Delta^0 + 5{,}9$, donde A_P es la amplitud máxima de las ondas P con un periodo de alrededor de 1 s, medida en micras.

<u>Relación empírica entre m_b y M_S</u>: $m_b = 0{,}56 \cdot M_S + 2{,}9$

Momento sísmico (M_0): $M_0 = \mu \cdot F \cdot s$, donde μ es el módulo de rigidez o cizalla, s es el deslizamiento de la falla en metros y F es el área del segmento desplazado, en m^2. Para los cálculos, suele tomarse $\mu = 3 \cdot 10^{10}$ N m^{-2} en la corteza y $\mu = 7 \cdot 10^{10}$ N m^{-2} en el manto. M_0 mide la energía disipada en toda el área de una falla movida cuando se produjo el terremoto.

Magnitud del momento (M_W): $M_W = \frac{2}{3}\log_{10}(M_0) - 6$. Se emplea para medir grandes terremotos y tiende a remplazar a M_S en la literatura científica, aunque suele dar valores algo superiores. La máxima M_W registrada es la del terremoto de Chile de 1960, con un valor de 9,5 y cuya M_S = 8,5.

<u>Relación entre intensidad y magnitud M_S</u>: $I_{\text{máx}} = 1{,}5 \cdot M_S - 1{,}8 \cdot \log_{10}(h) + 1{,}7$, donde h es la profundidad del foco. Esta relación vale para terremotos poco profundos (h < 50 km), y es empírica, como muchas de las anteriores. Eso significa que los resultados de aplicarla deben considerarse sólo como una aproximación.

<u>Relación entre momento y magnitud M_S</u>: $\log_{10}(M_0) = 1{,}5 \cdot M_S + 8{,}75$. Esta relación se ha establecido sólo para terremotos grandes, y es también empírica.

Energía liberada en un terremoto (E): $\log_{10}(E) = 4{,}4 + 1{,}5 \cdot M_S$ (Richter y Gutenberg, 1956), o bien, para M_S > 5: $\log_{10}(E) = 5{,}24 + 1{,}44 \cdot M_S$ (Båth, 1966). En estas fórmulas, que son empíricas, E está en Joules (1 J = 1 N m).

Frecuencia de los terremotos (N): $\log_{10}(N) = a - b \cdot M_S$, donde N es la frecuencia anual de sismos con una magnitud dada o mayor que ella en una región. Es la ecuación de una recta, que se conoce como la relación de Gutenberg-Richter; a es la ordenada en el origen, y vale entre 8 y 9; b es la pendiente, que vale aproximadamente 1 en un material fracturado que no soporta grandes esfuerzos. En una región más rígida o resistente, b puede valer 0,5.

Propagación de las ondas sísmicas

Ley de la reflexión: $i = R$, es decir, el ángulo de incidencia (i) es igual al de reflexión (R). Sólo vale cuando la onda reflejada es del mismo tipo que la incidente.

Ley de la refracción o de Snell: $\frac{\text{sen}(i)}{\text{sen}(r)} = \frac{V_1}{V_2}$, o bien, $\frac{\text{sen}(i)}{V_1} = \frac{\text{sen}(r)}{V_2}$, donde i es el ángulo de incidencia, r el de refracción, y V_1 y V_2 las velocidades de la onda en el medio por donde viaja antes y después de refractarse respectivamente. Esta fórmula puede emplearse para calcular reflexiones y refracciones de ondas de distinto tipo. Por ejemplo, si α_1 y α_2 son las velocidades de las ondas P en los dos medios, y β_1 y β_2 las de las ondas S:

$$\frac{\text{sen}(i_P)}{\alpha_1} = \frac{\text{sen}(r_P)}{\alpha_2} = \frac{\text{sen}(R_S)}{\beta_1} = \frac{\text{sen}(r_S)}{\beta_2}$$

Impedancia acústica (z): $z = \rho \cdot V$, donde ρ es la densidad de las rocas que atraviesa la onda, y V su velocidad.

Coeficiente de reflexión (RC): $RC = \frac{A_1}{A_0} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} = \frac{\rho_2 \cdot \alpha_2 - \rho_1 \cdot \alpha_1}{\rho_2 \cdot \alpha_2 + \rho_1 \cdot \alpha_1}$, donde A_0 y A_1 son las amplitudes de la onda P incidente y reflejada, ρ_1 y ρ_2 son las densidades de las rocas que atraviesa la onda, y α_1 y α_2 las velocidades de las ondas P en esas rocas.

Coeficiente de transmisión (TC): $TC = \frac{A_2}{A_0} = \frac{2 \cdot z_1}{z_2 + z_1} = \frac{2 \cdot \rho_1 \cdot \alpha_1}{\rho_2 \cdot \alpha_2 + \rho_1 \cdot \alpha_1}$, donde A_0 y A_2 son las amplitudes de la onda P incidente y refractada, ρ_1 y ρ_2 son las densidades de las rocas que atraviesa la onda, y α_1 y α_2 las velocidades de las ondas P en esas rocas. Las fórmulas anteriores para RC y TC sólo son validas cuando el ángulo de incidencia es bajo, es decir, el rayo es perpendicular a la superficie o casi, y no se generan ondas S.

Angulo crítico (i_c): $\text{sen}(i_c) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, donde i_c es el ángulo de incidencia de un rayo que se refracta viajando exactamente por la interfase entre los lechos de velocidades α_1 y α_2. Para cualquier ángulo de incidencia mayor, no se produce refracción, pero si reflexión, con lo que toda la energía del rayo incidente se transmite al reflejado.

Parámetro del rayo para capas planas (p): $p = \frac{\text{sen}(i_1)}{\alpha_1} = \frac{\text{sen}(i_2)}{\alpha_2} = \frac{\text{sen}(i_3)}{\alpha_3} = \cdots = cte$. Sirve para calcular la velocidad del lecho en el que se produce la refracción crítica: $p = \frac{1}{\alpha_m}$

Parámetro del rayo para capas esféricas (p):

$$p = \frac{r_1 \cdot \text{sen}(i_1)}{\alpha_1} = \frac{r_2 \cdot \text{sen}(i_2)}{\alpha_2} = \frac{r_3 \cdot \text{sen}(i_3)}{\alpha_3} = \cdots = cte \ .$$

Relación de Benndorf: $p = \frac{r \cdot \text{sen}(i)}{\alpha} = \frac{r_0}{\alpha_0}$, que se deduce del parámetro del rayo para capas esféricas y sirve para calcular el ángulo de incidencia de un rayo sísmico generado en un foco y registrado en una estación sísmica. Para ello se necesita saber la profundidad del foco y la distancia epicentral (Δº), y hay que usar un modelo de velocidades de las ondas P según la profundidad (por ejemplo, *iasp91*), y una tabla con los valores de p según Δº.