

# Apuntes Equilibrio General

TEMA 5  
Microeconomía Superior I  
3º Licenciatura en Economía  
Universidad de Salamanca  
Prof. Ramón J. Torregrosa

## 1 Intercambio puro

### 1.1 Supuestos:

- 1) Existen  $k$  mercancías indexadas por  $j \in J = \{1, 2, \dots, k\}$  y supondremos un mercado para cada una de ellas (recordar el concepto de mercancía: el mismo bien en dos lugares o fechas distintos son mercancías diferentes)
- 2) Existen  $n$  consumidores indexados por  $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$  cada uno de ellos descrito por unas preferencias  $\succsim_i$  y unas dotaciones iniciales  $w_i \in R_+^k$ .

### 1.2 Definiciones

Definición 1

Economía  $\{\succsim_i, w_i\}_{i \in I}$ .

Definición 2

Asignación de la economía  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_+^{n \times k}$  donde  $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in R_+^k$  es la cesta de consumo del consumidor  $i \in I$ .

Definición 3

Conjunto factible

$$F = \left\{ x \in R_+^{n \times k} : \sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} w_i \right\}.$$

Diremos que una asignación es factible si  $x \in F$ .

### 1.3 Eficiencia paretiana (PE)

PE fuerte

Sea  $x \in F$  diremos que  $x \in PEF$  si  $\nexists x' \in F$  tal que  $x'_i \succsim_i x_i \forall i \in I$  y  $x'_s \succ_s x_s$  para algún  $s \in I$ .

PE débil

Sea  $x \in F$  diremos que  $x \in PED$  si  $\nexists x' \in F$  tal que  $x'_i \succ_i x_i \forall i \in I$ .

### 1.3.1 PE para funciones de utilidad diferenciables

Caracterización analítica de la PE.

Para este caso la definición de PE es equivalente a resolver el siguiente programa:

$$\begin{cases} \max u_s(x_s) \text{ s. a.} \\ \sum_{i \in I} x_{ij} \leq \sum_{i \in I} w_{ij} \text{ para } j \in J \\ u_i(x_i) \geq u_i, i \in I - \{s\} \end{cases}$$

cuyo lagrangiano es

$$L(x, \lambda, \mu) = u_s(x_s) + \sum_{j \in J} \lambda_j \sum_{i \in I} (w_{ij} - x_{ij}) + \sum_{i \in I - \{s\}} \mu_i (u_i(x_i) - u_i),$$

y cuyas CPO respecto del vector de asignación  $x$  son<sup>1</sup>

$$\frac{\partial L}{\partial x_{sj}} = \frac{\partial u_s}{\partial x_{sj}} - \lambda_j = 0, j = 1, 2, \dots, k$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = -\lambda_j + \mu_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{ij}} = 0, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k$$

de donde se obtiene la bien conocida condición de PE para el caso de funciones de utilidad diferenciables en sus argumentos

$$\frac{\frac{\partial u_s}{\partial x_{sj}}}{\frac{\partial u_s}{\partial x_{sl}}} = \frac{\frac{\partial u_i}{\partial x_{ij}}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_{il}}} \quad \forall s, i \in I \text{ y } j, l \in J,$$

o bien que

$$RMS_s^{l,j} = RMS_i^{l,j}. \quad (1)$$

Es decir una asignación resulta PE si la disposición a pagar cualquier par de mercancías es igual para todos los individuos. Hay que recordar que (1) es sólo apropiada para algunos casos de funciones de utilidad diferenciables, como las funciones tipo CES no colapsadas. Además (1) es condición necesaria, la suficiencia depende de la cuasiconcavidad de la función de utilidad.

### 1.3.2 La caja de Edgeworth

La Caja de Edgeworth es una útil abstracción de una economía 2X2 (2 individuos y 2 mercancías) que nos permite representar los resultados de este tema en un espacio bidimensional. Este instrumento es ya conocido por los alumnos de este curso puesto que forma parte del programa de Microeconomía Intermedia. Propongo el siguiente ejercicio para representar el conjunto de asignaciones PE.

*Ejercicio:* Halle el conjunto de asignaciones PE para una economía de intercambio puro con dos bienes y dos individuos, suponiendo que la dotación inicial

---

<sup>1</sup>Las CPO de los multiplicadores que trasladan al sistema de ecuaciones las restricciones (saturadas) del problema se omiten.

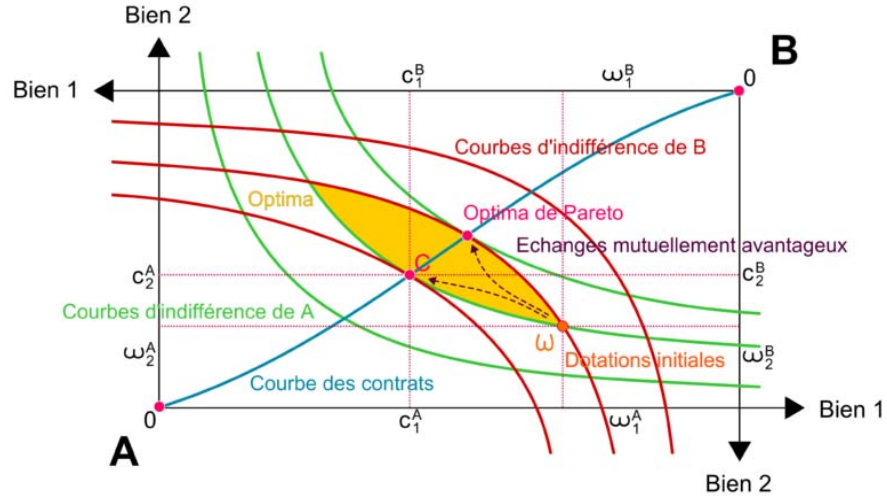


Figure 1: Caja de Edgeworth en una economía de intercambio puro 2X2.

agregada de ambos bienes es  $w = (w_x, w_y)$   $i = 1, 2$ , y que las preferencias de los individuos vienen representadas por las funciones de utilidad tipo Cobb-Douglas

$$u_1(x_1, y_1) = x_1^\alpha y_1^{1-\alpha}, u_2(x_2, y_2) = x_2^\beta y_2^{1-\beta},$$

discuta la curvatura del grafo del conjunto de asignaciones PE en relación a  $\alpha$  y  $\beta$ .

#### 1.4 El equilibrio walrasiano

Supongamos que las preferencias de nuestros  $n$  individuos son regulares (completas, reflexivas, transitivas, monótonas, convexas y continuas) y que participan paraméricamente en los mercados, es decir, son precio-aceptantes. Llamemos  $p \in R_+^k$  al vector de precios. Cada individuo maximiza sus preferencias sujeto a su restricción presupuestaria de riqueza, por lo que su demanda marshalliana viene dada por

$$x_i(p, w_i) = \arg \max \{ \tilde{x}_i \text{ s. a. } px_i \leq pw_i \},$$

a partir de aquí podemos definir la demanda neta del consumidor  $i$

$$z_i(p) = x_i(p, w_i) - w_i,$$

$z_i(p) \in R^k$  de tal forma que si  $z_{ij}(p) > 0 (< 0)$  el individuo es un demandante (ofertante) neto de la mercancía  $j$ .

Lema 1. Si las preferencias son regulares  $pz_i(p) = 0 \forall i \in I$ .

D: Efectivamente si  $x_i(p, w_i)$  es la cesta elegida satura la restricción presupuestaria esto es  $px_i(p, w_i) = pw_i$ , con lo que se obtiene el resultado.

**Lema 2.** Si las preferencias son regulares y  $\exists x_i \in X_i$  tal que  $x_i \succ_i x_i(p, w_i)$  entonces  $px_i > pw_i \forall i \in I$ .

D: Como por el lema 1  $px_i(p, w_i) = pw_i$ , entonces si  $x_i \succ x_i(p, w_i)$  tiene que ocurrir que  $px_i > px_i(p, w_i)$ . Esto significa que cualquier otra cesta que sea preferida a la elegida a los precios vigentes quedará fuera de su conjunto factible y, por tanto, a esos precios no podrá ser adquirida.

**Definición 4: Equilibrio walrasiano (EW)**

Un EW viene dado por un vector de precios  $p^* \in R_+^k$  y una asignación  $x(p^*, w_i) \in R_+^{n \times k}$  para la cual

$$x(p^*, w_i) = \arg \max \{ \sum_i \text{ s. a. } p^* x_i \leq p^* w_i \}, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} x_i(p^*, w_i) \leq \sum_{i \in I} w_i, \quad (3)$$

Es decir un EW viene definido por un vector de precios para el cual no hay un exceso de demanda positivo para ninguna mercancía, esto es, todos los mercados se vacían, siendo que todos los individuos eligen racionalmente qué consumir de cada mercancía a esos precios. Una condición equivalente a (2), basada en el lema 2, es

$$\text{Si } x_i \succ_i x_i(p^*, w_i) \text{ entonces } p^* x_i > p^* x_i(p^*, w_i) \forall i \in I.$$

Esto es, cualquier cesta preferida a la elegida a los precios  $p^*$  no es factible. Esta caracterización nos será útil más adelante.

**Definición 5: Función de exceso de demanda agregada**

$$z(p) = \sum_{i \in I} z_i(p).$$

Nótese que de acuerdo con la definición (3) el conjunto factible se puede expresar también como

$$F = \{ x \in R_+^{n \times k} : z(p) \leq 0 \}.$$

**Lema 3.**  $z(p)$  es homogénea de grado cero.

Trivial dado que  $x_i(p^*, w_i)$  es homogénea de grado cero  $\forall i \in I$  (Tema 1).

**Lema 4.** Si  $x_i(p^*, w_i)$  son continuas  $\rightarrow z(p)$  es continua

Trivial porque la suma de funciones continuas es continua.

**Teorema 1: Ley de Walras**

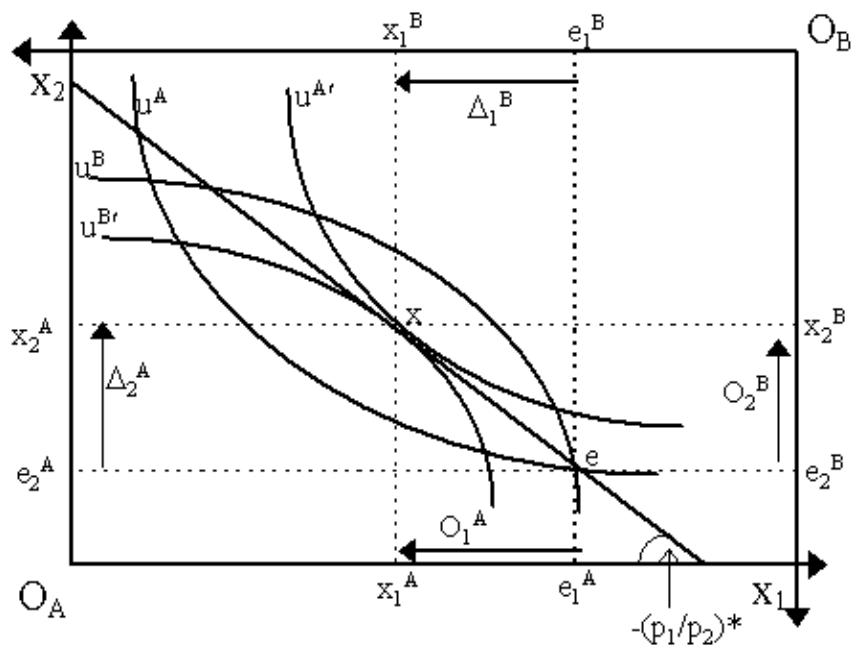


Figure 2: Equilibrio walrasiano en una economía de intercambio puro 2X2.

Sea  $\{\tilde{z}_i, w_i\}_{i \in I}$  una economía de intercambio puro, entonces para cualquier  $p \in R_+^k$  ocurre que  $pz(p) = 0$ .

D: Tenemos que  $pz(p) = p \sum_{i \in I} z_i(p) = \sum_{i \in I} pz_i(p) = 0$  en virtud del lema 1.

Nótese que la Ley de Walras se cumple para cualquier vector de precios.

**Corolario 1:** Si hay equilibrio en  $k - 1$  mercados  $\rightarrow$  el  $k$ -ésimo mercado estará en equilibrio.

En efecto, escribiendo

$$pz(p) = (p_1, p_2, \dots, p_k) \begin{pmatrix} z^1(p) \\ z^2(p) \\ \vdots \\ z^k(p) \end{pmatrix} = \sum_{j \in J} p_j z^j(p),$$

donde  $z^j(p) = \sum_{i \in I} z_{ij}(p) = \sum_{i \in I} (x_{ij}(p) - w_{ij})$ . Pero, además  $pz(p)$  puede ser expresado como

$$pz(p) = \sum_{j=1}^{k-1} p_j z^j(p) + p_k z^k(p),$$

pero en virtud del enunciado  $\sum_{j=1}^{k-1} p_j z^j(p) = 0$  y por el Teorema 1 tendremos el resultado, esto es que  $p_k z^k(p) = 0$ .

**Corolario 2:** Si en un mercado hay un exceso de demanda positivo entonces debe haber el menos algún otro en donde hay un exceso de demanda negativo.

La demostración es trivial.

### Teorema 2: Bienes gratuitos

Si  $p^*$  es un EW tal que  $z^j(p^*) = 0$  para  $j \in J$  y  $z^s(p^*) < 0$  para algún  $s \in J \rightarrow p_s^* = 0$ .

D: Supongamos que no es cierto y que  $p^* = (p_1^*, \dots, p_s^*, \dots, p_k^*) > 0$  es un EW entonces

$$p^* z(p^*) = \sum_{j \in J - \{s\}} p_j^* z^j(p^*) + p_s^* z^s(p^*) < 0,$$

debido a que  $z^s(p^*) < 0$  y  $p_s^* > 0$  lo que entra en contradicción con el Teorema 1 (ley de Walras), luego si  $p^*$  es un EW necesariamente  $p_s^* = 0$ .

#### 1.4.1 La existencia del EW

La prueba de la existencia del EW se fundamenta en el conocido teorema de Brouwer, que dice que para cualquier función  $f : D \rightarrow D$  continua, entonces  $\exists x \in D / f(x) = x$ . La demostración de este teorema es completamente trivial. Hay que decir que en un curso más avanzado de microeconomía donde

las funciones de demanda puedan ser concebidas como correspondencias punto-conjunto en vez de como funciones, aplica el equivalente del teorema de Brouwer para correspondencias debido a Kakutani. Desde un punto de vista intuitivo ambos resultados son equivalentes.

**Definición: Vector de precios normalizado**

Sea  $p = (p_1, p_2, \dots, p_k) \in R_+^k$  un vector de precios cualquiera el vector  $p' \in R_+^k$  es un vector de precios normalizado si sus componentes se obtienen como

$$p'_s = \frac{p_s}{\sum_{j \in J} p_j}, s \in J.$$

Lema 4:  $p' \in S^{k-1}$ .

Esto es por que la suma de las componentes de  $p'$  suma uno y significa que  $p'$  pertenece a un simplex unitario de orden  $k$ , que queda completamente definido con la especificación de los valores de  $k - 1$  ésimas dimensiones debido a que la que resta depende de las demás. Esta propiedad, junto con el siguiente enunciado, son los ingredientes para la demostración de la existencia.

**Teorema 3: Existencia**

Sea  $z : S^{k-1} \rightarrow R^k$  continua, entonces  $\exists p^* \in S^{k-1} / z(p^*) \leq 0$ .

El enunciado dice que si expresamos la función de exceso de demanda agregada como función de un vector de precios normalizado (cosa que se puede hacer siempre como hemos visto anteriormente), basta con que ésta sea continua para que se pueda encontrar un vector de precios para la cual sea factible y, por tanto, exista. La demostración se basa en el teorema de Brouwer y en la noción del tanteador walrasiano. Como es sabido dicho tanteador actúa intercediendo entre los participantes en el intercambio de tal forma que enuncia el precio de una mercancía, si observa que para ese precio hay un exceso de demanda positivo no se realiza el intercambio y enuncia un nuevo precio, esta vez un poco mayor. Por tanto para la demostración basta con definir una función que caracterice el comportamiento del tanteador walrasiano, que esté definida en  $S^{k-1}$  y que sea continua, por ejemplo  $g_i : S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$  tal que

$$g_i(p) = \frac{p_i + \max\{0, z_i(p)\}}{\sum_{j \in J} [p_j + \max\{0, z_j(p)\}]},$$

como  $g_i(p)$  es continua, en virtud del teorema de Brouwer existe un  $p^*$  tal que  $g_i(p^*) = p_i^* \forall i \in J$ . En efecto, sustituyendo

$$p_i^* = \frac{p_i^* + \max\{0, z_i(p^*)\}}{1 + \sum_{j \in J} \max\{0, z_j(p^*)\}},$$

o bien

$$p_i^* + p_i^* \sum_{j \in J} \max\{0, z_j(p^*)\} = p_i^* + \max\{0, z_i(p^*)\},$$

simplificando y multiplicando por  $z_i(p^*)$

$$p_i^* z_i(p^*) \sum_{j \in J} \max \{0, z_j(p^*)\} = z_i(p^*) \max \{0, z_i(p^*)\},$$

sumando en las mercancías

$$\sum_{i \in J} p_i^* z_i(p^*) \sum_{j \in J} \max \{0, z_j(p^*)\} = \sum_{i \in J} z_i(p^*) \max \{0, z_i(p^*)\},$$

pero como en virtud de la Ley de Walras (Teorema 1)  $\sum_{i \in J} p_i^* z_i(p^*) = 0$

$$\sum_{i \in J} z_i(p^*) \max \{0, z_i(p^*)\} = 0$$

y por tanto  $z_i(p^*) \leq 0 \forall i \in J$ .

## 1.5 Los Teoremas del Bienestar

**Primer Teorema del Bienestar:** Si  $\{p^*, x(p^*, w)\}$  es un EW, entonces  $x(p^*, w)$  es PE.

D: Supongamos lo contrario, es decir que a pesar de que  $\{p^*, x(p^*, w)\}$  es un EW no es PE. Por consiguiente, debe existir otra asignación  $x \neq x(p^*, w) \in \text{EW}$  para la cual  $x_i \succsim_i x_i(p^*, w_i) \forall i \in I - \{s\}$  y  $x_s \succ_s x_s(p^*, w_s)$  para algún  $s \in I$ . Pero en virtud del lema 2, ocurrirá que en ese caso,  $p^* x_i \geq p^* x_i(p^*, w_i) \forall i \in I - \{s\}$  y  $p^* x_s > p^* x_s(p^*, w_s)$ . Pero como  $p^* x_i(p^*, w_i) = p^* w_i \forall i \in I$  (lema 1), sumando respecto en  $I$  tendremos que

$$\sum_{i \in I} p^* x_i > \sum_{i \in I} p^* w_i,$$

de donde se deduce que la asignación  $x$  no es factible por lo que no existe otro EW que supere en el sentido de Pareto a  $x(p^*, w)$ , por lo que éste es PE.

**Segundo Teorema del Bienestar:** Cualquier asignación PE puede ser obtenida como un EW con la apropiada redistribución de las dotaciones iniciales.

La demostración de este teorema es inmediata, en particular, dado que el enunciado permite hacer cualquier redistribución de las dotaciones iniciales, basta con seleccionar directamente la asignación PE que se desea. Este hecho nos hace reflexionar acerca del paradójico significado de este teorema, en el que para obtener una asignación de forma descentralizada es necesario centralizar el reparto de las dotaciones iniciales. Sin embargo, las implicaciones de este Segundo Teorema tienen que ver con el problema de la igualdad de oportunidades. En la asignatura de Microeconomía Superior 2 tendremos la oportunidad de ahondar en estas implicaciones.

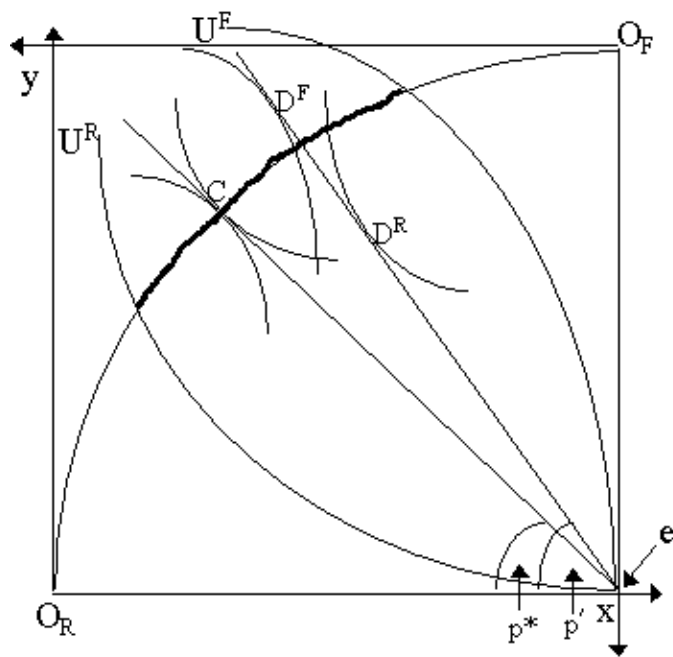


Figure 3: La asignación  $C$  es el equilibrio walrasiano y pertenece al conjunto de asignaciones eficientes.  $D$  no lo es.

## 2 Equilibrio General con Producción

En el epígrafe anterior hemos estudiado la eficiencia paretiana y el equilibrio walrasiano en el marco de economías de intercambio puro, esto es, economías donde los agentes sólo resuelven problemas de consumo. El propósito de este epígrafe es extender lo visto al caso en donde además hay agentes que tienen que resolver problemas de producción. Por tanto, vamos a suponer una economía formada por un conjunto  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  de consumidores, un conjunto  $J = \{1, 2, \dots, m\}$  de empresas y  $L$  mercancías con los siguientes supuestos:

1) Cada consumidor  $i \in I$  está caracterizado por su conjunto de consumo  $X_i \subset R^L$  y por su relación de preferencias  $\succsim_i$  regulares (completas, reflexivas, transitivas, monótonas, convexas y continuas) sobre  $X_i$ .

2) Cada empresa  $j \in J$  está caracterizada por su conjunto de producción  $Y_j \subset R^L, Y_j \neq \emptyset$  y cerrado.

3) Los recursos iniciales de mercancías (dotaciones iniciales totales) son  $W = (w_1, w_2, \dots, w_L) \in R^L$ .

La economía queda enteramente caracterizada por

$$E = \left\{ \{X_i, \succsim_i\}_{i \in I}, \{Y_j\}_{j \in J}, W \right\}.$$

### 2.0.1 Asignación

Una asignación  $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$  es una especificación del vector de consumo  $x_i \in X_i$  del consumidor  $i$  y el vector de netput  $y_j \in Y_j$  de la empresa  $j$ .

### 2.0.2 Asignación factible

Una asignación  $(x, y)$  es factible si  $(x, y) \in F$  donde

$$F = \left\{ (x, y) : \sum_{i \in I} x_i = W + \sum_{j \in J} y_j \right\}$$

es el conjunto factible de  $E$ .

**Ejemplo** Una economía con un bien producido y tiempo (input primario). Cada individuo  $i$  tiene preferencias sobre  $(c_i, o_i)$ , consumo y ocio respectivamente, y está dotado con  $(0, T_i)$ , una cantidad inicial de tiempo; el vector de producción de la empresa  $j$  es  $(q_j, -z_j)$ , por tanto, el conjunto factible de la economía es

$$\sum_{i \in I} (c_i, o_i) = \sum_{i \in I} (0, T_i) + \sum_{j \in J} (q_j, -z_j),$$

o bien

$$\sum_{i \in I} c_i = \sum_{j \in J} q_j, \quad \sum_{i \in I} T_i = \sum_{i \in I} o_i + \sum_{j \in J} z_j.$$

En este caso la restricción de factibilidad queda separada en dos, observe que cada una está medida en sus propias unidades: la primera dice los kilos, por ejemplo, de comida demandada iguala a los kilos de comida producida y, la segunda, la cantidad de tiempo disponible se distribuye entre ocio y trabajo.

### 2.0.3 Economía de propiedad privada

Es aquella en la que cada consumidor  $i$  tiene su vector de dotación inicial de mercancías  $w_i \in R^L$  de tal forma que  $W = \sum_{i \in I} w_i$  y una participación  $\theta_{ij} \geq 0$  en los beneficios de la empresa  $j$  tal que  $\sum_{i \in I} \theta_{ij} = 1$  con  $j = 1, 2, \dots, J$ , quedando especificada como

$$E^p = \left\{ \{X_i, \succsim_i\}_{i \in I}, \{Y_j\}_{j \in J}, \{w_i, \theta_{i1}, \dots, \theta_{iJ}\}_{i \in I} \right\}.$$

### 2.0.4 Eficiencia paretiana (PE)

Una asignación  $(x, y) \in F$  es PE si  $\nexists (x', y) \in F$  tal que  $x'_i \succsim_i x_i \forall i \in I$  y  $x'_s \succ_s x_s$  para algún  $s \in I$ .

### 2.0.5 Equilibrio walrasiano (EW)

Dada la economía  $E^p$ , un vector de precios  $p^* \in R^L$  y la asignación  $(x(p^*), y(p^*))$  son EW si

$$\begin{aligned} \forall j \in J, y_j(p^*) &= \arg \max \{p^* y_j \text{ s. a. } y_j \in Y_j\}, \\ \forall i \in I, x_i(p^*) &= \arg \max \left\{ \succsim_i \text{ s. a. } p^* x_i \leq p^* w_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} p^* y_j(p^*) \right\}, \\ \sum_{i \in I} x_i(p^*) &= \sum_{i \in I} w_i + \sum_{j \in J} y_j(p^*). \end{aligned}$$

### 2.0.6 El primer teorema en una economía con producción

Si  $\{p^*, (x(p^*), y(p^*))\}$  es un EW, entonces  $(x(p^*), y(p^*))$  es PE.

D: Procedemos por reducción al absurdo, por tanto, supongamos que hay otra asignación de mercado distinta a la walrasiana que Pareto-domina a  $(x(p^*), y(p^*))$ . Esto es,  $\exists (x, y)$  tal que  $x_i \succeq x_i(p^*) \forall i \in I - \{s\}$  y  $x_s \succ x_s(p^*)$  para algún  $s \in I$ . Pero en virtud de la monotonicidad esto implica que  $p^* x_i \geq p^* x_i(p^*) \forall i \in I - \{s\}$  y  $p^* x_s > p^* x_s(p^*)$  siendo que

$$p^* x_i(p^*) = p^* w_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} p^* y_j(p^*), \quad (4)$$

por tanto, agregando para todos los individuos, tiene que ocurrir que

$$\sum_{i \in I} p^* x_i \geq \sum_{i \in I} p^* x_i(p^*) = \sum_{i \in I} \left[ p^* w_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} p^* y_j(p^*) \right],$$

o bien

$$\sum_{i \in I} p^* x_i \geq \sum_{i \in I} p^* w_i + \sum_{j \in J} p^* y_j(p^*). \quad (5)$$

Por otro lado como  $y_j(p^*)$  es la combinación maximizadora de beneficios para  $j$  a los precios  $p^*$ , ocurre que  $p^* y_j(p^*) > p^* y_j \quad \forall y_j \in Y_j$ , por tanto, agregando para todas las empresas

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} p^* y_j(p^*) &> \sum_{j \in J} p^* y_j, \\ \sum_{i \in I} p^* w_i + \sum_{j \in J} p^* y_j(p^*) &> \sum_{i \in I} p^* w_i + \sum_{j \in J} p^* y_j, \end{aligned}$$

pero de acuerdo con (4)

$$\sum_{i \in I} p^* x_i(p^*) > \sum_{i \in I} p^* w_i + \sum_{j \in J} p^* y_j. \quad (6)$$

Comparando (5) con (6) se obtiene que

$$\sum_{i \in I} p^* x_i > \sum_{i \in I} p^* w_i + \sum_{j \in J} p^* y_j,$$

lo que se puede escribir como

$$\sum_{k=1}^L p_k^* \sum_{i \in I} x_i > \sum_{k=1}^L p_k^* \sum_{i \in I} w_i + \sum_{k=1}^L p_k^* \sum_{j \in J} y_j,$$

de donde se deduce que

$$\sum_{i \in I} x_i > \sum_{i \in I} w_i + \sum_{j \in J} y_j,$$

esto es  $(x, y) \notin F$  y por tanto  $\nexists(x, y)$  que Pareto-domine a  $(x(p^*), y(p^*))$ , por lo que  $(x(p^*), y(p^*))$  es PE.

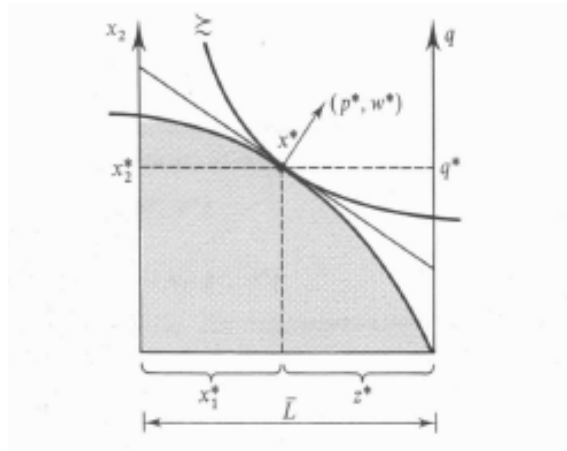


Figure 4: Primer teorema del bienestar para una economía con producción con un consumidor y una tecnología con un input y un output.

### 3 Ejercicios

1) Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos mercancías cuyas dotaciones iniciales son dos unidades de cada una. Hallar y representar el conjunto de asignaciones eficientes en el sentido de Pareto para los siguientes casos:

- A) ambos consumidores son tipo Cobb-Douglas (no necesariamente iguales)
- B) ambos consumidores son tipo Leontief (no necesariamente iguales)
- C) ambos consumidores poseen preferencias lineales (no necesariamente iguales)
- D) ambos consumidores poseen preferencias cuasi-lineales (no necesariamente iguales)
- E) el consumidor 1 posee preferencias Leontief y el 2 posee preferencias Cobb-Douglas
- F) el consumidor 1 posee preferencias lineales y el 2 posee preferencias Cobb-Douglas

2) Suponiendo que la mercancía  $y$  es numerario y  $p$  es el precio de la mercancía  $x$  (en términos de  $y$ ) y que las dotaciones iniciales de cada individuo son  $w_i = (1,1)$   $i=1,2$ . Hallar el equilibrio Walrasiano para todos los apartados del ejercicio anterior.

3) Sea una economía con dos mercancías  $(x,y)$  y dos individuos cuyas preferencias vienen dadas por  $u_1(x_1, y_1) = \ln x_1 + y_1$ ;  $u_2(x_2, y_2) = \frac{1}{2} \ln x_2 + y_2$ , halle

- A) el conjunto de asignaciones Pareto-eficientes
  - B) el núcleo del intercambio
  - C) el equilibrio walrasiano
- para los casos en que  $w_1 = (5, 4)$  y  $w_2 = (1, 1)$ ;  $w_1 = (3, 1)$  y  $w_2 = (3, 4)$
- 3) Sea una economía con dos mercancías  $(x,y)$  y dos individuos cuyas prefer-

encias vienen dadas por  $u_1(x_1, y_1) = \ln x_1 + y_1$ ;  $u_2(x_2, y_2) = 5 \ln x_2 + y_2$ , donde  $w_1 = (1, 0)$  y  $w_2 = (0, 1)$ . Hallar:

- A) el conjunto de asignaciones Pareto-eficientes
- B) el núcleo del intercambio
- C) el equilibrio walrasiano

4) Considere una economía con  $n$  individuos (preferencias regulares) y dos mercancías: repollos y ocio (que consideraremos como numerario), donde una cantidad  $q$  de repollos es obtenida mediante la absorción de  $C(q)$  unidades de ocio. En este contexto determine:

- a) las condiciones que deben cumplir las asignaciones Pareto-eficientes.
- b) la condición que ha de cumplir el equilibrio Walrasiano.
- c) Ponga ejemplo de, al menos, dos tecnologías para las cuales el equilibrio Walrasiano no se sostenga.

5) Sea una economía con dos mercancías  $(x, y)$  producidas a partir de una dotación fija de 200 unidades de trabajo por periodo, mediante las tecnologías  $x = \sqrt{L_x}$ ,  $y = \sqrt{L_y}$ , donde  $L_x$  y  $L_y$  representan las cantidades de trabajo dedicadas a producir  $x$  e  $y$  respectivamente. Además las preferencias entre  $x$  e  $y$  para esta economía vienen dadas por la función de utilidad  $U(x, y) = \sqrt{x, y}$ . En este caso, hallar:

- a) La asignación Pareto-eficiente.

b) El equilibrio Walrasiano. ¿Cuál será el beneficio de las empresas en equilibrio?

6) Sea una economía con  $n$  consumidores y dos mercancías de las cuales una es producida, X; y la otra, Y, es numerario. Las preferencias de un consumidor representativo vienen dadas por  $u_i(x_i, y_i) = \alpha_i \ln x_i + y_i$  con  $\alpha_i \in (0, 1)$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ ; y cada uno de ellos está dotado con una cantidad inicial  $w_i > 1$  de input primario. La producción competitiva de X absorbe  $C(x) = x^2/2$  (donde  $x = \sum x_i$ ) unidades agregadas de input primario. En ese caso hallar:

A) El nivel de producción agregado  $x$  eficiente en el sentido de Pareto.

B) El equilibrio walrasiano, caracterizando las funciones de demanda y oferta agregadas de la economía y los beneficios de la industria.

7) Hallar la asignación eficiente en el sentido de Pareto de una economía con producción donde las preferencias del agente representativo vienen dadas por  $u(x, y) = 30x - \frac{1}{10}x^2 + y$ , donde  $x$  es la cantidad de bien producido e  $y$  es ocio. La dotación inicial de tiempo (recurso primario) es de 650 y los costes de producción industriales del bien producido vienen dados por  $C(x) = \frac{1}{20}x^2$  unidades de tiempo. ¿Cuál es el precio de equilibrio walrasiano del bien producido para la economía descrita? ¿A cuánto asciende el beneficio de la industria y la "renta nacional" de dicha economía?

8) Sea una economía de intercambio puro con dos individuos  $I = 1, 2$  y dos bienes X, Y. La dotación inicial TOTAL de cada uno de los bienes es 200 y 9000 respectivamente; las preferencias respecto de las cantidades  $(x_i, y_i)$   $I = 1, 2$  de cada bien vienen representadas respectivamente por las funciones de utilidad

$$u_1(x_1, y_1) = 100x_1 - \frac{1}{20}x_1^2 + y_1, \quad u_2(x_2, y_2) = 90x_2 - \frac{3}{80}x_2^2 + y_2.$$

En ese caso hallar y REPRESENTAR:

A) El conjunto de asignaciones eficientes en el sentido de Pareto;

B) El precio de equilibrio walrasiano (considerando a  $Y$  como numerario) para el caso  $w_1 = (200, 1000)$ ;  $w_2 = (0, 8000)$ .

9) Represente las curvas de oferta y demanda y calcule el precio de equilibrio walrasiano para una economía cuya función indirecta de utilidad (bienestar) viene dada por

$$V(p, M) = (100 - p)^2 + M,$$

donde  $M = T + \pi$  representa la suma de la dotación inicial de factor primario y los beneficios de la industria que los individuos toman como dados; y  $p > 0$  representa el precio del PIB. Y, por el lado de la oferta, la función de beneficios de la industria competitiva que produce el PIB viene dada por:

$$\pi(p) = \frac{3}{2}p^2.$$