La teoría dual del consumidor
Microeconomía Superior I
Prof. Ramón J. Torregrosa

1 Introducción

Queremos construir una teoría de la demanda a partir de los fundamentos básicos que definen nuestra conducta como consumidores, esto es, nuestros gustos y preferencias entre distintos bienes. Para ello vamos a suponer que el consumidor tiene definidas sus preferencias sobre un conjunto de consumo $X \subset R_+^k$, esto sobre k bienes mensurables cada uno de ellos mediante un número real positivo. El hecho de que supongamos este subconjunto de R_+^k se entiende como que como consumidores resolvemos nuestros problemas de consumo en magnitudes que nos son familiarmente próximas y que garantizan el principio de escacez inherente al problema económico. Así, un elemento de X, esto es, un $x \in X$ se puede interpretar como una bandeja que contiene unidades de cada uno de los bienes o bien $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ donde x_j es la cantidad del bien $j = 1, 2, ..., k$.

Para definir las preferencias del consumidor recurrimos a una relación binaria que pueda comparar cualquier par de cestas que nos resulten mensurablemente familiares, al fin y al cabo, eso es lo que hacemos para definir nuestros gustos y preferencias por las cosas: "yo prefiero esta bandeja a aquella otra". De esta forma, sea $\succeq$ esta relación binaria que opera de la siguiente manera $\forall x, y \in X, x \succsim y$ significa que x es al menos tan preferida como y , esta es la llamada relación de preferencia-indiferencia y está compuesta por la prefencia estrícta $x \succ y$ que leemos x es preferida a y y por la relación de indiferencia $x \sim y$ que leemos x es indiferente a y.

1.1 Racionalidad del consumidor

Queremos caracterizar a un consumidor racional, pero, ¿ cuándo decimos que un consumidor es racional?, muy sencillo, cuando se comporta de forma coherente. para que esto ocurra debemos de exigir que nuestra relación de preferencia-indiferencia cumpla los siguientes axiomas:

REFLEXIVIDAD: $\forall x \in X$, $x \sim x$.

COMPLETITUD: $\forall x, y \in X$, o bien $x \succsim y$ o bien $y \succsim x$ o ambas cosas.

TRANSITIVIDAD: $\forall x, y, z \in X$, si $x \succsim y$ y $y \succsim z$ entonces $x \succsim z$.

El primer axioma es una propiedad inherente de la indiferencia. El segundo le da al consumidor la oportunidad de elegir entre cestas que le son familiares, esto es supondremos que las preferencias del consumidor operan completamente en su conjunto de consumo. El tercero proporciona una propiedad de coherencia que evita los bucles de decisión. En cualquier caso si pensamos en alguien que al elegir incumple algunos de estos supuestos respecto de cestas ciertas, llegamos a la conclusión de que no debe ser muy cuerdo.

1.2 De las preferencias a la utilidad

Como veremos luego, los tres axiomas anteriores en realidad son suficientes para caracterizar un comportamiento racional en la elección. Sin embargo ellos por si solos no permiten ir más allá en el sentido de que éstos no son suficiente para caracterizar el comportamiento en términos funcionales. Por tanto, los siguientes axiomas permitirán dar un importante paso en esa dirección:

CONTINUIDAD: $\forall x, y \in X$, los conjuntos $B(y) = \{x : x \succsim y\}$ y $W(y) = \{x : x \preceq y\}$ son cerrados.

Hay que reconocer que esta definición topológica de continuidad suele ser un poco confusa para el principiante, sin embargo, posteriormente, un importante ejemplo nos servirá para aclarar definitivamente este concepto.

MONOTONICIDAD: $\forall x, y \in X$, si $x \geq y$ entonces $x \succsim y$.

Este axioma proporciona garantiza matemáticamente existencia de la solución, pero además tiene una importante interpretación que es que el problema que nos interesa es el problema económico, esto es, el que está vinculado con la escasez. Dicho de otra manera, el ámbito de elección del consumidor es aquel en donde éste nunca se sacia y prefiere siempre aquella bandejas que tengan al menos un poco más de algún bien. Hay una variedad fuerte de la monotonicidad imprescindible para la existencia de la función de utilidad,

MONOTONICIDAD FUERTE: $\forall x, y \in X$, si $x \geq y$ y $x \neq y$ entonces $x \succ y$.

CONVEXIDAD: $\forall x, y, z \in X$, si $x \succsim y$ y $y \succsim z$ entonces $\lambda x + (1-\lambda) y \succsim z$.

La convexidad es una propiedad importante para la unicidad de la elección del consumidor y su interpretación económica indica que el consumidor preferirá las bandejas mixtas a las especializadas, esto es, nuestro consumidor prefiere arroz con pollo a un plato de sólo de arroz o un plato sólo de pollo. Esto parece una tontería pero sin embargo tiene importantes implicaciones a la hora de como el consumidor valora relativamente las cantidades de bienes que componen una determinada cesta. La convexidad garantizará una propiedad muy razonable en la que el consumidor valorará más a un bien en la medida en que este se haga relativamente más escaso respecto de otro.

Todos estos axiomas son suficientes para enunciar el siguiente teorema demostrado por Debreu en 1952:

Sean unas preferencias $\succsim$ completas, reflexivas, transitivas, contínuas y fuertemente monótonas entonces existe una función de utilidad contínua $u : X \to R$ de tal forma que:

$$\text{si } x \succsim y \text{ entonces } u(x) \geq u(y).$$

La prueba se basa en el teorema del punto fijo de Kakutani.

La importancia de este teorema radica en que nos dice que podemos asociar una función de utilidad a unas preferencias, esto nos abre la puerta de la potente herramienta del análisis matemático al estudio del comportamiento del consumidor. Sin embargo, hay que tener claro que la función de utilidad es un auxiliar, un atajo. Si nos preguntaramos sobre cuál es nuestra función de utilidad no sabriamos muy bien que responder, sin embargo si que podemos decir cosas acerca de nuestros gustos y preferencias. Lo que quiero decir con esto es que no debemos olvidar aqui que lo fundamental son las preferencias y no la función de utilidad. Esto se puede expresar mediante la siguiente propiedad:

Cualquier transformación monótona positiva de la función de utilidad representa las mismas preferencias, esto es, sea $v = \theta(u)$ tal que $\theta\prime > 0$ entonces si $x \succsim y$ $u(x) \geq u(y)$ y $v(x) \geq v(y)$.

Lo que nos viene a decir esta propiedad es que el valor cardinal de la función de utilidad no tiene ningun significado y que, por tanto, lo importante de tal función son las preferencias que representa. En consecuencia la función de utilidad tiene caracter ordinal.

1.2.1 Definiciones importantes

Conjunto/curva de indiferencia

$$I(y) = \{x \in X : x \sim y\},$$

por tanto un conjunto de indiferencia a la cesta y son todas las cestas del conjunto de consumo que son indiferentes a y. Si las preferencias son representables mediante una función de utilidad este conjunto se puede expresar como la curva de nivel que ordena a todas las cestas que proporcionan el mismo nivel de utilidad v, esto es

$$I(v) = \{x \in X : u(x) = v\}.$$

Utilidad marginal de un bien Llamamos UMg^i a la medida del aumento de utilidad cuando el consumidor consume una unidad infinitesimal del bien i, por tanto si $u(x)$ es diferenciable

$$UMg^i = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}.$$

Relación Marginal de Sustitución La $RMS^{j,i}$ indica a cuánto está dispuesto el consumidor a renunciar del bien j para obtener una unidad infinitesimal del bien i manteniendo su nivel de utilidad constante. Por tanto

$$RMS^{j,i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \left.\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}\right|_v = \left.\frac{dx_j}{dx_i}\right|_v. \quad (1)$$

Como vemos este concepto introduce la noción de valor de cualquier cesta. Para calcularlo analíticamente nos valemos del concepto de diferencial total. Partiendo de una curva de indiferencia

$$u(x) = \upsilon$$

y diferenciando en x_j y x_i

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} dx_i = 0,$$

despejando tetiendo en cuenta (1) podemos escribir

$$RMS^{j,i} = -\frac{UMg^i}{UMg^j}.$$

Es decir la $RMS^{j,i}$ se mide como el cociente de las utilidades marginales que proporciona cada bien.

1.3 La Conducta del consumidor

Sea un consumidor con preferencias regulares sobre $X \subset R_+^k$ representadas por una función de utilidad $u : X \to R$ de buen comportamiento se trata de caracterizar analíticamente las pautas de su conducta en los mercados. Para ello suponemos que nuestro consumidor es precio-aceptante y, por tanto, se enfrenta a un vector de precios $p \in R_+^k$ dotado de una cantidad de renta o riqueza inicial m. Así, como es sabido de la asignatura de Microeconomía Intermedia, se origina la restricción presupuestaria del consumidor definida como un conjunto convexo y compacto

$$M = \{x \in X : px \leq m\},$$

y el problema que ha de resolver el consumdor es

$$\max u(x) \text{ s. a. } x \in M.$$

Hemos aprendido en Microeconomía intermedia que si $u(x)$ es diferenciable este problema se resuelve mediante un Lagrangiano, esto es

$$\max L(x, \lambda) = u(x) + \lambda [m - px],$$

cuyas condiciones de primer orden, suponiéndo que la solución es interior,[1] son

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \lambda p_i, i = 1, 2, ..., k. \tag{2}$$

[1] Una caracterización mas general viene dada por las condiciones de Kuhn-Tucker que incluyen a las soluciones esquina. Esta condiciones vienen dadas por

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i \leq 0, i = 1, 2, ..., k$$

$$\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \lambda p_i\right] x_i = 0, i = 1, 2, ..., k.$$

Sin embargo considero soluciones interiores por simplicidad en la exposición.

Llamemos $x(p,m)$ a la solución de este problema que es la conocida como función de demanda marshalliana. Es sabido que si $u(x)$ es continua y M es compacto dicha $x(p,m)$ existe, sin embargo el reciproco no es cierto como lo muestra el siguiente ejemplo de preferencias lexicográficas, es decir, que podemos tener una función de demanda sin necesidad de que las preferencia sean continuas y, por tanto, función de utilidad exista.

Ejemplo 1: Las preferencias lexicográficas vienen dadas por $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2_+$

$$x \succ y \text{ si } x_1 > y_1, \text{ o si } x_1 = y_1 \text{ entonces } x_2 > y_2.$$

Demuestre que dichas preferencias no son continuas (lo que implica que no cumplen el teorema de Debreu) pero sin embargo generan una función de demanda bien definida.

1.3.1 Propiedades de la función de demanda marshalliana

1) $x(p,m)$ es homogénea de grado cero en sus argumentos esto es:

$$x(tp, tm) = x(p,m) \text{ con } t > 0.$$

En efecto porque cuando los precios y renta varían en la misma proporción, por ejemplo, una variación en la escala de medida del valor, el conjunto factible no varía es decir

$$\{x \in X : tpx \leq tm\} = \{x \in X : px \leq m\}$$

y por tanto la solución la solución del problema de maximización tampoco.

2) Si las preferencias son monótonas entonces $px(p,m) = m$.

La demostración es trivial.

3) La demanda marshalliana de cualquier bien se puede obtener como

$$x_j(p,m) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j}. \tag{3}$$

D: La restricción presupuestaria en el óptimo se puede escribir como

$$px(p,m) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i x_i(p,m) = m,$$

derivando dicha restricción respecto de p_j tenemos,
$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j} + x_j(p,m) = 0$ con lo que obtenemos el resultado.

4) La suma del valor de las derivadas de las demandas marshallianas respecto de la renta es igual a la unidad

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m} = 1. \tag{4}$$

D: derivando la restricción presupuestaria $px(p,m) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_i x_i(p,m) = m$ respecto de m se obtiene el resultado.

1.4 La función indirecta de utilidad (FIU)

Es la función de utilidad evaluada en el óptimo:

$$v(p,m) = \{\max u(x) \text{ s. a. } x \in M\}.$$

o bien

$$v(p,m) = u(x(p,m)).$$

Ejemplo 2: Hallar la indirecta de utilidad para las preferencias representadas por la función de utilidad Cobb-Douglas

$$u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}.$$

1.4.1 Propiedades de la FIU

1) $v(p,m)$ en no creciente en p: $v(p',m) \leq v(p,m)$ para $p' \geq p$.

D: por que $\{x \in X : p'x \leq m\} \subset \{x \in X : px \leq m\}$ si $p' \geq p$, y por tanto

$$v(p',m) = \{\max u(x) \text{ s. a. } p'x \leq m\} \leq \{\max u(x) \text{ s. a. } px \leq m\} = v(p,m).$$

2) $v(p,m)$ en no decreciente en m: $v(p,m') \geq v(p,m)$ para $m' \geq m$.

D: por que $\{x \in X : px \leq m\} \subset \{x \in X : px \leq m'\}$ si $m' \geq m$, y por tanto

$$v(p,m) = \{\max u(x) \text{ s. a. } px \leq m\} \leq \{\max u(x) \text{ s. a. } px \leq m'\} = v(p,m').$$

3) $v(p,m)$ es homogénea de grado cero en (p,m): $v(p,m) = v(tp,tm)$ para $t > 0$.

D: por la propiedad 1 de la demanda marshalliana.

4) $v(p,m)$ es cuasiconvexa en p, es decir, el conjunto $\{p : v(p,m) \leq k\}$ es convexo.

D: definamos los siguientes conjuntos presupuestarios

$$M^i = \left\{x \in X : p^i x \leq m\right\}, i = 0,1,2$$

de modo que $p^2 = \lambda p^0 + (1-\lambda)p^1$ tenemos que demostrar que $M^2 \subset M^0 \cup M^1$ esto es que $\forall x \in M^2 \rightarrow x \in M^0 \cup M^1$ que significa que $\forall x$ tal que $p^2 x \leq m$ entonces $p^0 x \leq m$ o $p^1 x \leq m$. Procedamos por reducción al absurdo es decir $\forall x \in M^2, x \notin M^0 \cup M^1$ esto es $x \in (X - M^0) \cap (X - M^1)$, [2] o bien que $p^0 x > m$ y $p^1 x > m$ entonces multiplicando la primera por λ y la segunda por $1 - \lambda$ y sumando tenemos que $p^2 x > m$ lo que es contradice el supuesto de que $x \in M^2$.

Ejercicio: A partir de las propiedades anteriores represente una FIU en un espacio bidimensional de precios.

5) La identidad de Roy

$$x_j(p,m) = -\frac{\partial v(p,m)/\partial p_j}{\partial v(p,m)/\partial m}.$$

D: derivando parcialmente $v(p,m) = u(x(p,m))$ respecto de p_j tenemos

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j},$$

pero en virtud de las condiciones de primer orden del consumidor, dadas por (2) podemos escribir

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_j} = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial p_j},$$

y teniendo en cuenta la propiedad 3 de la demanda marshalliana, ecuación (3),

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial p_j} = -\lambda x_j(p,m). \tag{5}$$

Ahora derivemos parcialmente $v(p,m) = u(x(p,m))$ respecto de m

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m},$$

de nuevo por (2)

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i(p,m)}{\partial m},$$

teniendo en cuenta la propiedad 4 de la demanda marshalliana dada por la ecuación (4),

$$\frac{\partial v(p,m)}{\partial m} = \lambda. \tag{6}$$

Finalmente dividiendo (5) y (6) obtenemos el resultado.

[2] $X - M$ es el complementario de M en X.

1.5 El dual: La función de gasto

Como sabemos los problemas max $u(x)$ s. a.$px \leq m$ y min px s.a. $u(x) \geq u$ son equivalentes entre sí. Esto es, dados los precios, hay valores de u y m para los cuales la solución sería la misma. El primero es conocido como PRIMAL y el segundo como DUAL. Lo que vamos a hacer en esta sección es explotar estas propiedades para ello definamos a la función de gasto como la inversa de la FIU, esto es, la solución su dual

$$e(p,u) = \{\min px \text{ s.a. } u(x) \geq u\}.$$

La solución del problema dual min px s.a. $u(x) \geq u$ se escribe como $x(p,u)$ y es conocida como demanda hicksiana o demanda compensada y nos indica como varía el consumo de los bienes cuando varía el precio manteniendo el nivel de utilidad constante, por tanto

$$e(p,u) = px(p,u)$$

que cumple que

$$px(p,u) \leq px, \forall x \neq x(p,u), \tag{7}$$

por tanto, $x(p,u)$ es la combinación minimizadora del coste a los precios p.

Ejercicio: Representar gáficamente los problemas primal y dual.

Ejemplo 3: A partir de la función indirecta de utilidad para las preferencias representadas por la función de utilidad Cobb-Douglas del ejercicio 2 obtenga la función de gasto.

1.5.1 Propiedades de la función de gasto

1) $e(p,u)$ es no decreciente en $p: e(p\acute{},u) \geq e(p,u) \forall p\acute{} \geq p$.

D: como $p\acute{} \geq p$ entonces $p\acute{}x(p\acute{},u) \geq px(p\acute{},u)$ pero por 7 $px(p\acute{},u) \geq px(p,u)$ con lo que se obtiene el resultado.

2) $e(p,u)$ es homogénea de grado 1 en $p: e(tp,u) = te(p,u), t > 0$.

D: supongamos que es falso, esto es que $e(tp,u) \neq te(p,u)$. Sea $x(tp,u)$ la combinación minimizadora del coste a los precios tp. Es claro, en virtud de 7, que $tpx(tp,u) \leq tpx(p,u)$, pero simplificando $px(tp,u) \leq px(p,u)$ lo que es una contradicción, por lo que el enunciado es correcto.

3) $e(p,u)$ es cóncava en $p: e(\lambda p^0 + (1-\lambda)p^1, u) \geq \lambda e(p^0,u) + (1-\lambda)e(p^1,u)$

D: sea $p^2 = \lambda p^0 + (1-\lambda)p^1$ y $e(p^i,u) = p^i x(p^i,u)$ para $i = 0,1,2$, en particular $e(p^2,u) = p^2 x(p^2,u) = \lambda p^0 x(p^2,u) + (1-\lambda)p^1 x(p^2,u) \geq \lambda e(p^0,u) + (1-\lambda)e(p^1,u)$ en virtud de 7.

4) Lema de Shephard

$$x(p,u) = \nabla_p e(p,u) \text{ o bien } x_j(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_j}, j = 1,2,...,k.$$

D: definamos la función auxiliar

$$g(p) = e(p,u) - px(p^*,u),$$

esta función cumple que $g(p^*) = 0$ y $g(p) < 0$ para $p \neq p^*$, luego $g(p)$ alcanza un máximo en p^* por lo que si $e(p,u)$ es diferenciable se cumple que

$$\frac{\partial g(p^*)}{\partial p_j} = \frac{\partial e(p^*,u)}{\partial p_j} - x_j(p^*,u) = 0.$$

1.6 Identidades en el óptimo

La dualidad permite establecer las siguientes identidades en el óptimo:

1. $e(p, v(p,m)) \equiv m$: El gasto mínimo necesario para alcanzar el nivel de utilidad $v(p,m)$ es m.

2. $v(p, e(p,u)) \equiv u$: La utilidad máxima generada por la renta $e(p,u)$ es u.

3. $x(p,m) = x^h(p, v(p,m))$: La demanda marshalliana correspondiente al nivel de renta m es idéntica a la demanda hicksiana correspondiente al nivel de utilidad $v(p,m)$.

4. $x(p,u) = x^m(p, e(p,u))$: La demanda hicksiana correspondiente al nivel de utilidad u es idéntica a la demanda marshalliana correspondiente al nivel de renta $e(p,u)$.

2 Ejercicios propuestos

1) Hallar las funciones indirectas de utilidad, las funciones de gasto y las demandas marshallianas y hicksianas para cada una de las preferencias representadas por las siguientes funciones de utilidad. Discuta para qué tipo de bienes cada una de esas preferencias son adecuadas. Nota: Considere m como la renta del consumidor.

a) Cobb-Douglas: $u(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}; \alpha \in (0,1)$
b) Lineales: $u(x,y) = \alpha x + \beta y; \alpha, \beta \in R^+$
c) Cuasilineales: $u(x,y) = v(x) + y; v' > 0, v'' < 0.$
d) Leontief: $u(x,y) = \min\{x/\alpha, y/\beta\}; \alpha, \beta \in R^+$
e) CES: $u(x,y) = \alpha x^\rho + (1-\alpha) y^\rho$; $\rho \leq 1$

2) Sea $u(x,y)$ la función de utilidad regular que representa las preferencias de los súbditos de Barataria respecto de la cantidad x de comida y la cantidad y de bebida. El gobernador de Barataria debe recaudar imperiosamente una cantidad R mediante impuestos y se debate si hacerlo mediante un impuesto específico a la cantidad x de comida o mediante un impuesto a tanto alzado sobre la renta M de sus súbditos. ¿Qué impuesto será el mejor para los súbditos de Barataria?.

3) Utilizando las identidades en el óptimo demuestre la identidad de Roy

4) Sean las preferencias representadas por la funcion de utilidad CES

$$u(x, y) = (\alpha x^{\rho} + (1-\alpha) y^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}; \rho \leq 1.$$

a) Demuestre que la elasticidad de sustitución entre y y x es constante e igual a $1/(1-\rho)$

b) Demuestre que cuando $\rho \to 0$ dichas preferencias son Cobb-Douglas

c) Demuestre que cuando $\rho \to 1$ dichas preferencias son Lineales

d) Demuestre que cuando $\rho \to -\infty$ dichas preferencias son Leontief

e) Hallar las funciones indirecta de utilidad y de gasto

5) Sean las preferencias $u(x, y) = y + v(x)$, donde x es un bien indivisible tal que $x = 0$ ó $x = 1$ e y representa al resto de los bienes (numerario), hallar:

a) la demanda de x e y

b) las funciones indirecta de utilidad y de gasto